

易しくない 材料力学

科学書刊株式会社:電子版の原稿

「橋梁&都市 PROJECT: 2011」(ISSN 1344 - 7084)

島 田 静 雄

この冊子は、雑誌「橋梁と都市 PROJECT」に連載することを予定して作成した MS-Word 版の原稿から、PDF 形式に変換したもののコピーです。2010 年度から、出版関係は電子出版を模索した努力をする時代に入りました。科学書刊株式会社雑誌は、この動きに対応するため、ハードコピーとしての「橋梁&都市 PROJECT」の発行を休刊とし、電子化にどのように対応するかの研究を始めました。実を言うと、この傾向は 10 年前から予測されていました。筆者は、この先取りとして、三種類の発表形式を試してきました

一つ目は、雑誌の記事としての形式です。「橋梁と都市 PROJECT」のスタイルは B5 版二段組みです。こちらの方は、しばらく休刊になりました。この原稿は MS-Word で A4 版一段組みで作成してきましたが、そのまま体裁のよいレポート形式になるように注意して編集してあります。この形式のままにしたのが、この PDF 版です。

二つ目、この PDF 版をインターネットで公開することです。すこしページ数が多くなりますが、ユーザは、これをダウンロードして印刷して見ることができます。プリンタをお持ちでなければ、原稿ファイルを USB にして持ち込めば、簡易製本までサービスしてくれる街中の印刷屋さんが見つかりようになりました。PDF 版の WEB サイトは、差し当たり下記にしております。

<http://www.nakanihon.co.jp/gijyutsu/Shimada/shimadatop.html>

三つ目は、パソコンの画面でランダムに項目がアクセスするようにリンクを張った WEB 版です。この利用方法を考えて、筆者の原稿は、約 600 字程度のパラグラフ単位分けてあって、インターネットでのアクセス速度が速くなるように、一つのパラグラフがパソコンの一画面に入るようにしてあります。目次と索引とを参照すれば、かなり便利な検索が使えます。WEB サイトは上の PDF 版と同じ個所です。この冊子は、表紙と目次を含めて全 112 ページあります。電子出版を考えると、ページ番号で項目位置を探すことが実用的ではありません。したがって、目次と索引は、章・節・項のパラグラフ番号番号で検索するように使って下さい。

目 次

0. はじめに

1. 引張材と圧縮材

1.1 単一部材の引張りと圧縮

応力と歪みの定義から始めます；応力と応力度とを区別すること；ヤング率とフックの法則；破壊の始まりを知っておくこと；単位系を理解すること；数値計算の表し方に技術的な習慣がある。

演習例題 1.1

1.2 組み合わせ部材の引張りと圧縮

剛性と弾性の表し方；並列部材と直列部材；1.2.3 材料を組み合わせで一つの部材に換算する

演習例題 1.2

1.3 偏心载荷を考える簡単な組み合わせ構造

偏心して作用する力を受ける構造；構造力学的には一次の不静定である；非線形の構造モデルを扱うことがある

演習例題 1.3

1.4 温度応力・残留応力などの不静定問題

演習例題 1.4

1.5 曲がった引張り材

演習例題 1.5

2. 簡単なトラスの応力と変形

2.1 静定トラス

トラスは鋼構造に用いられる；簡単な平面トラス；静定平面トラスの解析；内的に静定で安定である条件；外的に安定で静定を判定するには支点に仮想の部材を考える；立体トラスの支点も仮想の部材を考える；連続体のモデル化；トラスの変形

演習例題 2.1

2.2 簡単な不静定トラス

解析の原理

演習例題 2.2

3. 二次元弾性体の応力と変形

3.1 摩擦と剪断

二次元弾性体とは；垂直応力と剪断応力；剪断力と摩擦力との異同

演習例題 3.1

3.2 主応力と主ひずみ

座標系を考えて応力度の向きと符号を決める；座標軸を回転させたときの応力度の表し方；最初に垂直応力度だけによる変形を理解する；剪断剛性率は幾何学的に計算できる；主歪みだけの変形から剪断歪みを求める；材料の変形は長さ変化で計測する；モール円を応用して主歪みの向きと大きさを求める

演習例題 3.2

4. 三次元的に扱う柱と梁

4.1 座標系の解釈と選択

座標系は恣意的に決めること；局所座標系を決めて応力を区別する；マトリックスの成分を標準化する；平面構造力学の梁での応力と向き；対角線要素を0にするように局所座標系を決める；ラーメンの解析では右手系の方が便利；中立軸は眼に見えない理論的な軸であること；寸法

表示法は座標系の考え方とは違うこと

4.2 断面図形の幾何学的定数

図形の性質を代数的に表す量；断面積 A ；断面一次モーメント Q_x , Q_y ；重心位置 x_0 , y_0 ；断面二次モーメント；原点を重心にしたときの断面二次モーメント；断面係数の計算；断面回転半径の計算；断面の主軸の向き

演習例題 4-1

5. 弾性的性質の数学モデル

5.1 線形弾性と非線形弾性

線形・非線形は数学用語であること；線形式は重ね合わせの計算法が使える；材料力学では数式の適用範囲を考える

5.2 線形弾性として扱う便宜的な方法

材料は品質管理されて提供される；接線弾性係数；割線弾性係数

演習例題 5.1

5.3 線形弾性体として扱う柱と梁

三次元的に考えると時の問題；柱と梁材に適した自然の高木；圧縮材にはパイプ構造がよいこと；柱と梁の応力度分布の計算仮定；学問的知見と実務的な応用

5.4 柱の座屈の現れ方

仮想変位を理解する；柱の弾性座屈の原理；柱の弾性座屈が起こるメカニズム；短柱の座屈の現れ方；座屈実験の結果と解釈；設計実用式の工夫；設計示方書への反映

6. 部材断面内の不静定問題

6.1 組み合わせ部材

複合材料の用語がある；種類違いの材料を組み合わせる；構造物は部材を単位として組み合わせる

6.2 柱断面の核

曲げと圧縮を受ける梁を解く；バネで支えられた梁と同質の問題；パイプ断面は核の範囲が広がる

6.3 鉄筋コンクリート梁の計算

コンクリート部材の積み木モデル；曲げと圧縮を受ける梁として解く；偏心軸力を受ける圧縮柱の計算

演習例題 6.1

6.4 二次元弾性体の解析問題

不静定の力学問題として捉える；地盤の支持問題；橋の支承と橋脚や橋台での支圧；ヘルツの接触応力度；コンクリートの引張り試験；桁断面に作用する支圧の問題

7. 梁に作用する剪断応力度

7.1 剪断応力度分布のメカニズム

剪断を受ける矩形断面の梁；剪断応力度の大きさ；剪断流の考え方を理解する

7.2 剪断応力度を検証する必要がある断面形状

溶接桁フランジ部分；リベット桁のフランジ部分繋ぎリベットの検証；鉄筋コンクリート桁の付着応力度；合成桁のズレ止めの検証例

7.3 剪断中心の計算

部材としての捩じれと構造物としての捩じれ；捩じれ難い長い針金を捩じると螺旋を描く；剪断中心の計算例題

演習例題 7.1

8. 剪断応力度に関する特殊な問題

8.1 曲げを受ける梁の剪断応力度によるソリ

部材断面の凹凸変形をソリと言う；剪断を受ける矩形断面の梁初求めます；数値計算の例題と解説

8.2 幅広のフランジ有効幅

座屈を考える薄板の組み合わせ部材；実験事実の説明に有効幅の考えが必要になる；有効幅の提案原理；有効幅の規定

8.3 棒の捩じれ

二種類の捩じれ剛性がある；円柱は理想的な捩じれが生じる；中空断面は捩じれに対して効率的である；円断面以外は反りが出る；薄肉断面の反りは二種類ある

8.4 剪断流の不静定問題

非対称の箱桁断面の剪断中心；二箱断面の場合の不静定問題；構造物として解析する場合の曲げ捩じれ

9. 材料の破壊と部材の破壊

9.1 材料試験の計画と結果の見方

材料試験をする意義を理解しておく；吉田徳次郎について；材料試験機の原理；ニュートン単位系への移行による混乱；強度と強さとの言葉の使い分け；破壊と崩壊の定義；引張試験が示す材料の性質；構造用鋼材が示す特異な性質；接着剤の強度は剪断強度で言う；塑性・脆性・粘性；クリープとリラクゼーション

9.2 破壊の力学モデル

降服点と最大強度との使い分け；寸法効果があることの説明が難しい；材料の破壊は二つに分かれること；鋼材の破壊モデル；モール円の集合で表す破壊モデル；コンクリート強度のモール円モデル；実験技術が難しいこと；砂や砂利のモール円モデル；弾性設計法に応用するときの許容応力度

9.3 梁の塑性設計

橋梁と建築物とでは考え方が異なる；破壊させるときの判断に使う曲げモーメント；梁の応力度分布の経過；鋼梁の曲げ応力と変形の関係；荷重を戻したときの残留変形と残留応力；連鎖的な破壊を止める方法；断面係数と塑性係数；断面係数と塑性係数の計算例

10. 衝撃・振動・疲労

10.1 応力の動的な増加

振動すると静的な力よりも大きな力になる；衝突の力学は運動量の保存則を使う；衝撃試験も参考にする

10.2 振動と波動

一か所で観察するとき振動として扱う；波動の性質を見落とすことがある；細長い部材の縦波は波動の速度が定量的に計算できる

演習例題 10.1

10.3 疲労破壊の全体概念

疲労破壊の予兆は亀裂から；破壊させるにはエネルギーが必要；エントロピーと言う概念がある

10.4 疲労試験の難しさ

疲労の現れ方；繰り返し回数の見積り；荷重を制御する試験機的设计が難しい

10.5 疲労実験データの整理

荷重の大きさと振幅；実験データの整理方法；応力度振幅の関係を求める；応力度振幅の関係を求める；ランダムな外力の評価方法

10.6 破壊に影響する寸法効果

内部欠陥説；形状による影響もある；穴を空けた部材

11. 数理弾性学

11.1 弾性体の数学モデル

理論と実用との使い分けが問題になる；力の実体は分からないこと；線形理論が実用的であること

11.2 均質な弾性体の解析モデル

解析の条件；独立な弾性常数の個数；直交異方性の弾性体；梁の解析に使うグリーン関数；線形の微分方程式を母関数とする；数値計算にはマトリックスが使われる

11.3 二次元弾性体の解析

二次元弾性体の問題；釣合条件の整理に応力関数が使われる；二番目として弾性条件を使う；適合条件は変位の性質を規定する条件；境界条件を考える；微分式に代えて差分式も研究される

11.4 薄板の曲げ変形

板の曲げは二次元弾性と同質であること；直交異方性板モデル；薄板の座屈問題と設計上の提案

12. 三次元的に扱う弾性問題

12.1 経験で得られた知識

三軸圧縮応力状態では強度が上がる；土嚢と蛇籠；円柱座標で扱う問題は二次元的な解析になる

12.2 螺旋鉄筋コンクリート柱

袋に中身を詰めた柱；螺旋鉄筋柱の耐荷力の計算原理

演習例題 12.1

12.3 構造力学の性質で解析する部材

二種の捩じれ剛性を持つ梁の捩じれ；曲げ捩じれ変形の基本式；境界条件の仮定が理解し難いこと；支点でそりが拘束されない場合の解

演習例題 12.2

12.4 コイルバネの弾性

捩じりを考える変形

演習例題 12.3

終わりに

用語索引

あ		亀裂	10.3.1	材料強弱学	0
アイバー	2.1.1	脚長	3.1.4	材料試験	9.1.1
安定	2.1.3	逆マトリックス	11.2.6	材料試験機	9.1.3
雨だれ法	10.5.5	球座標	12.1.3	材料力学	0
赤沢常雄	6.4.5	許容支圧応力度	9.2.9	三連モーメント式	11.3.6
仝	9.2.7	境界条件	11.2.1	残留応力	1.4.1
板の曲げ	11.4.1	強度	9.1.5	仝	5.3.4
ヴェーラー	10.4.3	橋梁工学	0	仝	9.3.5
薄板の座屈	11.4.3	極限設計	9.2.1	残留変形	9.3.5
S I 単位系	1.1.5	クラペイロン	11.3.6	シャルピー衝撃試験機	10.1.3
S N 線図	10.5.1	クリープ	9.1.11	シリンダ強度	9.2.1
エアリー	11.3.2	グリーン関数	11.2.4	ジंकビッチ	2.1.7
エネルギー資源	10.3.3	クレモナの図式解法	2.1.10	支圧	6.4.3
エントロピー	10.3.3	沓	2.1.2	仝	9.2.3
影響線法	5.1.2	ゲージ長	3.2.6	仝	12.1.1
円柱座標	12.1.3	ケベック橋	11.1.3	支圧応力	3.1.3
縁応力度	9.2.9	形状係数	9.3.7	支圧応力度	9.2.9
遠藤達雄	10.5.5	懸垂線	1.5.1	支承	2.1.2
オイラーの座屈荷重	5.4.3	限界細長比	5.4.4	支承	6.4.3
応用力学	0	コンタクト式ゲージ	3.2.6	支点	2.1.2
応力	1.1.1	固定支点	2.1.2	軸力	1.1.1
応力緩和	9.1.11	固有振動数	10.2.2	実験技術	9.2.7
応力関数	11.3.2	構成側	11.2.1	蛇籠	12.1.2
応力測定	3.2.6	構造力学	0	主ひずみ	3.2.1
応力度	1.1.2	降伏点	1.1.4	主応力	3.2.1
押し出し	9.1.8	降伏点	9.1.6	主軸	4.2.9
温度応力	1.4.1	仝	9.1.8	集中質点	10.2.1
帯鉄筋	12.1.1	剛性	1.2.1	衝撃	10.1.1
か		剛性マトリックス	4.1.3	衝撃試験	10.1.3
核 (断面の)	6.2.1	剛性係数	1.1.3	衝突	10.1.2
仮想仕事の原理	5.4.1	合成桁	6.1.2	振動	10.1.1
仮想変位	5.4.1	合板	6.1.1	震度法	9.3.1
加算法	5.1.2	仝	11.2.3	垂直応力	3.1.2
可動支点	2.1.2	骨材	9.1.9	スカラー倍	5.1.2
解析の条件	11.2.1	さ		ストレス	1.1.2
階差式	11.3.6	サンブナンの原理	5.3.4	ズレ止め	7.2.4
外的に安定	2.1.5	サンブナンの捩じれ	8.3.1	隅肉溶接	3.1.4
外力	1.1.2	差分式	11.3.6	寸法効果	9.2.2
格点	2.1.2	座標系	4.1.1	仝	10.6.1
割線弾性係数	5.2.3	最大細長比の制限	5.4.5	セカント弾性係数	5.2.3
換算弾性係数	5.2.3	細長比	2.1.11	静定	2.1.3
重ね合わせの方法	1.3.2	仝	4.2.8	静定基本系	2.2.1
重ね合わせの方法	5.1.2	仝	5.4.3	脆性	9.1.7
重ね梁	6.1.3	材料科学	0	接線弾性係数	5.2.2
片振れ強度	10.5.1	材料学	0	接着剤	9.1.9
				設計示方書	5.4.7

節点	2. 1. 2	積み木モデル	6. 3. 1	疲労限	10. 5. 1
節点法	2. 1. 3	吊橋	12. 3. 3	疲労試験	10. 4. 1
線形弾性	1. 1. 3	釣合条件	2. 1. 3	疲労破壊	10. 3. 1
全	5. 1. 1	全	11. 2. 1	非線形	1. 1. 4
繊維応力度	4. 2. 7	テイモシエンコ	0	歪み	1. 1. 1
前面隅肉	3. 1. 4	デカルト座標	4. 1. 1	歪みエネルギー一定説	5. 3. 5
全強	3. 1. 4	デルタ関数	11. 2. 4	全	9. 2. 4
剪断	3. 1. 1	低温脆性	10. 1. 3	フープテンション	1. 5. 1
全	7. 1. 3	適合条件	11. 2. 1	全	12. 2. 1
剪断応力	3. 1. 2	転位	3. 2. 8	フォース鉄道橋	11. 1. 3
剪断剛性率	3. 2. 4	全	9. 1. 10	フォン・ミーゼス	5. 3. 5
剪断遅れ	8. 1. 1	電気抵抗線歪みゲージ		フックの法則	1. 1. 3
剪断中心	5. 3. 1		3. 2. 6	全	5. 3. 4
全	7. 3. 1	トラス	2. 1. 1	プライウッド	11. 2. 3
全	8. 4. 1	トラスの変形	2. 1. 8	プラットトラス	2. 1. 1
剪断流	8. 1. 3	土囊	12. 1. 2	プロパティ	4. 2. 1
そり	12. 3. 1	動弾性係数	5. 2. 2	不静定	1. 3. 2
塑性	9. 1. 7			不静定部材	2. 2. 1
塑性係数	9. 3. 7	な		不静定力	2. 2. 1
塑性座屈	5. 4. 6	内的に静定で安定	2. 1. 4	付着応力度	7. 2. 3
塑性設計	9. 1. 8	内部応力	5. 3. 4	複合材料	6. 1. 1
属性	4. 2. 1	内部欠陥説	10. 6. 1	複雑さ	10. 3. 3
反り	8. 1. 1	内部摩擦	9. 1. 10	複剪強	3. 1. 4
		内部摩擦角	9. 2. 8	物体力	11. 3. 2
た		内力	1. 1. 2	ベッティの相反作用の法則	
ダブルワーレン	2. 1. 9	ニュートン単位	1. 1. 5		5. 3. 1
ダルマ落とし	6. 3. 1	全	9. 1. 4	ベニヤ板	11. 2. 3
縦弾性率	1. 1. 3	二次元弾性体	3. 1. 1	ヘルツの接触	6. 4. 4
大虹梁	5. 3. 2	全	11. 3. 1	平面保持の仮定	1. 3. 1
卓越振動数	10. 2. 2	熱可塑性接着剤	9. 1. 9	全	5. 3. 4
単純振じれ	8. 3. 1	熱硬化性接着剤	9. 1. 9	並列部材	1. 2. 2
単純振じれ	12. 3. 1	振じれ	8. 3. 1	変位のマトリックス	4. 1. 3
単剪強	3. 1. 4	振じれ中心	5. 3. 1	変形	1. 1. 2
炭素繊維強化プラスチック		全	7. 3. 1	ポアソン比	3. 1. 1
	6. 1. 1	粘性	9. 1. 10	保存系	5. 1. 1
短柱	5. 4. 4	伸び	9. 1. 8	母関数	11. 2. 5
弾性	1. 2. 1			崩壊	9. 1. 6
弾性係数	1. 1. 3	は			
弾性限界	1. 1. 4	ハイブリッド	6. 1. 2	ま	
弾性座屈	5. 4. 2	ハウトラス	2. 1. 1	マトリックス	11. 2. 6
弾性常数の個数	11. 2. 2	パスカル単位	1. 1. 5	曲げ振じれ	8. 3. 1
弾性条件	11. 2. 1	波動	10. 2. 1	曲げ振じれ剛性	8. 3. 1
弾性設計	9. 2. 1	波動の速度。	10. 2. 3	曲げ振じれ	12. 3. 1
弾性率	1. 1. 3	破壊	9. 1. 6	摩擦	3. 1. 1
断面係数	4. 2. 7	全	9. 2. 1	ミーゼズ	9. 2. 4
全	9. 3. 7	破壊モデル	9. 2. 4	右手系	4. 1. 1
断面二次半径	4. 2. 8	反撥 (リバウンド)	10. 1. 2	モール円	3. 2. 2
中立軸	4. 1. 7	ひび割れ (亀裂)	6. 3. 2	全	9. 2. 5
長柱	5. 4. 4	引き抜き	9. 1. 8		
直交異方性	11. 2. 3	比例限界	1. 1. 4	や	
直列部材	1. 2. 2	疲労	10. 1. 1	ヤング率	1. 1. 3
強さ	9. 1. 5	疲労強度	10. 5. 1	山はね	9. 2. 5

全	12.1.1				
有限要素法	2.1.7	螺旋	7.3.2	連続体	2.1.7
有効幅	8.2.1	螺旋鉄筋柱	12.2.1	ロゼットゲージ	3.2.6
予長	3.1.4	リバウンド	10.2.4	ロッカー支承	6.4.3
よいとまけ	12.1.1	リラクゼーション	9.1.11		
横弾性率	1.1.3	立体トラス	2.1.6	わ	
吉田徳次郎	9.1.2	流体	9.1.10	ワーレントラス	2.1.1
呼び数	1.1.5	両振れ強度	10.5.1	ワイブル	10.6.1
全	9.1.4	力学	0	ワグナーの曲げ振じれ	
呼び寸法	3.1.4	レインフロー法	10.5.5		8.3.5
		連鎖的な破壊	9.3.6		

0. はじめに

材料力学の元の英語は、Strength of Materials です。日本語に訳すとき、最初、**材料強弱学**と言いました。この学問は、力を伝える目的に材料を使うときの力学を扱い、強度を考えた合理的な材料の使い方を研究します。力がどのように分布し、伝わるかの解析に焦点を置くとき、**力学**(mechanics)を応用する、この全体を**応用力学**(applied mechanics)と括ります。応用力学の課題には、運動など、動的な現象の解析も含まれます。材料違いで強度の表れ方が異なり、力の分布の性質が関連しますので、材料力学は、応用力学の中を含めます。大学の工科系の履修科目名では、応用力学としていることが普通に見られます。力を伝える構造物の解析に焦点を絞るときは、**構造力学**(structural mechanics)です。**材料科学**(materials science)と言うと、物理的な課題よりも広く考え、化学的な性質なども含めた広い概念です。**材料学**と言うときは、材料だけでなく、ボルトなどにした加工製品についてのカタログ的な知識の総合、言わば、物識り的なことを指します。セメントやアスファルトなどの知識を埋めておくことは、材料学の範囲です。**橋梁工学**は、橋梁に特化した専門性の高い実学です。この中身は、上で説明したすべての学を総合した内容を含みます。したがって、工科系の大学では、応用力学を必修科目扱いにしますが、橋梁工学は土木系の学科で扱われ、また選択科目としています。

この著作は、建設系の大学生の講義テキストとして、筆者が 1960 年代に準備した手書きの資料を、電子書籍用に編集し直したものです。材料力学の知識は、技術者としてほぼ必須ですので、学科目としては必修単位として扱われます。経験のある技術者ならば、既に常識となっている知識であっても、新入学生にとっては全く新しい学問です。その意味を含めて「易しくない」の形容詞を付けました。「易しい・易しくない」の評価は、本来 読者側の判断で言う言葉です。新入学生に「気を引き締めて勉強してね」と忠告する意味を込めて「易しくない」を付けました。材料力学は、実学です。取り済ました学問ではありません。材料力学の応用は、主に数値に直して判断に使います。したがって、大学での材料力学の勉強は、講義、実験、数値計算の演習をセットにして進めます。このことを意識して、この著作では、数値計算の例題を多く載せました。書店に行けば多くの参考書がありますし、インターネットを介しても知識を吸収できます。独学には便利な時代になりました。しかし、対面授業は、本来、常識の欠けを埋め、納得した理解が得られる貴重な場です。この環境を電子書籍の形で実現する一つの試みを、この著作で工夫してみました。著作の構成は、12 章に分けてあります。この数は、雑誌に連載する 12 ヶ月分を意識したことと、講義の時間割として 1 学期分 15 回に割りつけることも考えたためです。新入学生には、半期 週 2 回、または週 1 回 通年の講義時間が必要でしょう。

材料力学の知識レベルを判定するときの基準を述べておきます。高校では、力を数学的に扱うときに向きと大きさを持ったベクトルの概念を使っています。材料力学では、力の種類を外力と内力に分け、内力の方を応力と言うこと、さらにモーメント(偶力)も応力として扱うことが特徴です。この段階で、剪断力の理解が一つの関門です。高校の物理では摩擦力として出てきますが、剪断力はその延長で理解する課題です。なお、学部レベルでは二次元の材料力学が基礎知識です。板の曲げなどの三次元的な扱いは大学院修士レベルの問題です。そして、振じれが本当に理解できるようになれば、大学院博士レベルの知識があると言えるでしょう。

欧米に科学技術を学んだ 1950 年代までは、材料力学の著名な参考書の翻訳書が多く使われていました。教科書として使う価値がある著作は、毎年発行されることで、年代を超えて知識の共有ができます。応用力学では、**ティモシェンコ**(Timoshenko, 1878-1972)の著作が世界的に広く読まれていました。時代と国境を超えて参考書にする価値があります。筆者の著作には、多くの引用資料があります。元を辿ると殆どがティモシェンコの著作に行き着きます。しかし、著作権や出版権などが関係して、今では古典、悪く言えば化石資料の扱いになっています。これらに学んだ焼き直しの教科書がその後多く出版されると共に、ティモシェンコの名前や、その著作で紹介されている多くの学者の名前も、引用されなくなりました。先達の研究成果を正しく理解しておくことは、教養として弃えておきたいものです。この著作では、実用知識の説明だけでなく、できるだけ、歴史に残る学者や研究者の名前も紹介するようにしました。

1. 引張材と圧縮材

1.1 単一部材の引張りと圧縮

1.1.1 応力と歪みの定義から始めます

材料を、断面一定で細長い真っ直ぐな棒状の部材に加工して、引張力または圧縮力を持たせることは、構造要素として最も基本的な使い方です。木材や石材は、圧縮材の柱として身近に見られます。引張を受ける使い方のときは、両端をどうやって繋ぐかの技術的な難題があります。実用的な引張り材は、日常的には断面積の小さな針金を使い、それを束ねた形で使います。したがって、断面積の大きい真っ直ぐな引張り材は、トラス構造に組み上げる部材以外に実例を見ることは多くありません。材料力学は、力と変形とを数学的に扱います。記号の使い方は、常識的な約束があります。例えば、部材の**軸力** N (通常、圧縮は負の数当てます)、断面積 A 、断面の**応力度** σ 、部材の長さ L と伸縮量を ΔL 、**歪み** (ひずみ) に ε などと使います。応力度と歪み (ストレイン、strain) の定義式は；

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \dots(1.1)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \dots(1.2)$$

1.1.2 応力と応力度とを区別すること

部材に外から作用させる力を**外力**と言い、重さなどが主因ですので感覚的に理解できます。この力が材料内部を伝わるのが**内力**ですが、こちらは感覚的には理解できないことと、その分布が分かりませんので、全体を数学的に積分した概念で扱い、**応力** (ストレス: stress) の用語を使います。応力は、材料を仮に切断したと想像して、その切断面に作用する外力として理解します。力の向きは、切断面のどちらを考えるかの区別で反対向きです。力は、正負の符号を付ける必要があるのですが、これには部材の座標系の約束と関係しますので、厄介な定義を必要とします。これは、モーメントと剪断力の説明のところで蒸し返します。引張材と圧縮材は直線状の部材ですので、単純な1次元の座標系を考えれば済みます。上の式で、 N は応力です。**軸力**と言うのは部材の座標系の概念が入った応力の用語です。式(1.1)で計算する σ は、単位断面積当たりの応力の大きさ、**応力度**を表しています。応力の度合いと言う意味で、技術的な用語では、応力と応力度とを使い分けま。式(1.2)は、**歪み** (strain) は、単位長さ当たりの**変形** (deformation) の度合いを表します。なお、数式には、変数や定数に英字かギリシャ文字の一字を当てるのが習慣ですが、記号の種類が増えるときは下付き文字や上付き文字を加えます。コンピュータのプログラミング言語では、ギリシャ文字は使えませんし、一字では表現不足になるので、英数字の名前を使います。

1.1.3 ヤング率とフックの法則

弾性材料は、応力と歪みが比例する性質のある材料です。これを次の式で扱います。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \dots(1.3)$$

ここに、 E をヤング率 (Young's modulus: Thomas Young, 1773-1829) と言うのですが、一般的には**弾性率** (elastic modulus)、と言います。応力度の種類に応じて、弾性率には種々の定義があります。ヤング率と言うときは、引張または圧縮のような力と変形の関係を、式(1.3)のように比率で扱う場合を指します。**縦弾性率** E 、**横弾性率** G と区別することがあります。紛らわしいのですが、**弾性係数**、**剛性係数**と言うときは、引張材・圧縮材の場合には、材料の性質と言うよりも、部材としての弾性的な性質の係数 (パラメータ) に使います。式(1.3)は、数学的に言うと σ と ε を変数とした**一次式**です。力学的に見ると、応力度 $\sigma=0$ のとき歪み $\varepsilon=0$ を約束しています。 E を定数と見なせるときは、**線形式**と言います。材料をそのように扱うことができるときは**線形弾性**と言います。通常はこれを仮定して構造計算に応用します。**フックの法則** (Hooke's law; Robert Hooke, 1635-1703) とは、**変形**が微小である範囲ならば、力と変形とが比例すると仮定できることを言います。「歪みが微小である」とは言わないことに注意します。部分的に見れば歪みが小さくても、その積み重ねは大きな変形になることがあるからです。これは弾性的な針金の曲げ変形に見られます。式(1.1)~(1.3)が材料力学の出発点です。

1.1.4 破壊の始まりを知っておくこと

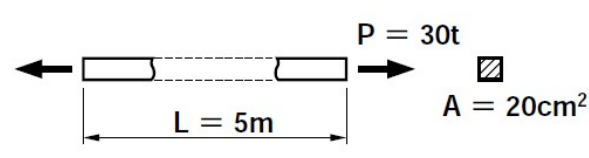
フックの法則は、精密な材料試験をすればするほど、法則が成り立つ範囲が狭くなります。微小の範囲は数学的な概念ですので、実際にどの程度であるかは実用的に判断します。材料は、力が作用して変形しても、力を抜けば元に戻る範囲で使います。線形式からそれる性質を考えると、非線形です。細い弾性的な針金は、大きな曲げ変形を示しますので、力と変形との関係は曲線を描きますが、力を抜けば元に戻ります。曲線になる性質の内、後の第9章で説明する塑性とは違います。材料が塑性的に振る舞うときは破壊の始まりと見ます。まだ破壊ではありません。この始まり位置を弾性限界と言います。鋼材では降伏点(yield point)とも言います。鋼材料では、降伏点の応力度を弾性限界とも、また、比例限界とも言います。強度の高い鋼材は降伏点に近づくと、非線形の弾性的な性質が見られ、実験的に観察すると、降伏点がはっきりと分からないことがあります。そのため、降伏点に相当する応力度の目安として、歪みの大きさで、例えば 0.3% 限界、などのように言うことがあります。金属材料の破断は明らかな破壊です。崩壊とも言えます。軟鋼は、塑性的な加工変形をさせて別の連続体の形状にしても強度に期待して使うことができる性質があることに特徴があります。したがって、降伏点、弾性限界、比例限界の区別は、曖昧なところがあります。技術的な判断を必要とする設計の課題では、材料が塑性的な性質を示すところが破壊の始まりです。その表れ方は、材料の形状や応力度の分布などと関連します。これが材料力学の課題です。しかし、鋼材などは、同じ材料であっても、加工の履歴次第で降伏点異なる場合があります。材料学と言うときは、材料違いの方の知識を扱うと考えるとよいでしょう。

1.1.5 単位系を理解すること

材料力学を数学的に扱うときは、式(1.1)～(1.3)のように使いますが、工学的に考えるときは、数値と共に単位系(unit)を同時に考えます。この表し方は、理解し易さと扱い易さを優先します。長さで言えば、ミクロン、ミリ、センチ、メートル、キロなどの大きさの単位を使い分けます。より技術的な習慣は、なるべく桁数の少ない整数で表し、それに合うような単位系を選択します。この数値が呼び数です。理論的・学問的に正確に言いたいときの数値と、呼び数の使い分けは技術の課題では大きな議論になることがあります。例えば、力の表し方です。物理的に言うと、力は質量に加速度を掛けた単位を持ちます。しかし、力を感覚的に分かり易い数値で表すときは、地球の重力加速度を暗黙の定数とした重量を使うのが分かり易いのです。そこで、材料を、例えばキログラム(kg)で計量して、それを荷重に使いたいときは、同じ数値を使って、単位記号に重量単位を意味する kgf と使い分けます。単に kg で代用しても、混乱はしません。ところが、迷惑なことに、SI 単位系を信奉してニュートン単位 N を使うことを提案するようになりました。応力度にはパスカル単位を使うべきですが、桁数の多きな数値になりますので、N/cm² のように妥協して使っています。土木構造物は地球上に建設し、宇宙空間に建設することを考える必要がありませんので、分かり易い重量単位を呼び数として使うことが実務を扱う現場では賢い選択です。この著作の数値では、保守的に見えますが、過去の計算書も参考にできるように、重量単位系を使います。ただし、SI 単位系の知識を常識として弃えておくことは大切です。

1.1.6 数値計算の表し方に技術的な習慣がある。

実務で使う計算書は、必要にして充分の情報を書きます。この書き方を見れば、書き手の技術レベルが大体分かります。幾つかの約束がありますので、計算例と解説を下にまとめます。

応力の計算 (タイトルまたは見出しがあります)	
 $\sigma = P/A = 30\,000/20 = 1500 \text{ kgf/cm}^2$ $\epsilon = \sigma/E = 1500/2.1 \times 10^6 = 714 \times 10^{-6}$ $\Delta l = l\epsilon = 500 \times 714 \times 10^{-6} = 0.357 \text{ cm}$	<ul style="list-style-type: none"> • 簡単な図を添えるのが丁寧です。ここに、記号や数値の宣言が入ります。 • 数式を書き、その通りの並びで数を書きます。単位系を変えることがあります。 • Eは、定数としての約束があります。 • 結果の数値は、常識的には有効数字3桁でまとめ、単位系を添えます。 • 見易くしたいとき、3桁ごとに数をまとめ、間を少し空けます。 • 除数記号/は、行数を節約するときに使います。 • 体裁を整えるために工夫を凝らすことがあります。例えば、イコール記号を縦に揃えるなどがあります。

演習例題 1.1

- (1) 長さ 5m、断面積 20cm²の鋼断面が 30tf の引張力を受けているとして、応力・ひずみ、伸びを計算せよ。ただし、ヤング率は 2.1×10⁶ kgf/cm² とする。(解は 1.1.6 項参照)
- (2) 直径 d=16mm の鋼丸棒の引張り歪みが $\epsilon = 0.7 \times 10^{-3}$ のとき、応力度と引張り力を求めよ。
(解： $\sigma = 1470$ kgf/cm²、 $P = 2.95$ tf)
- (3) 幅 3cm、暑さ 0.8cm の鋼の薄板で引張強度の試験をしたい。鋼材は SS41 である。引張試験機の秤量レンジには、5tf、10tf、20tf の何れが良いか？ (備考：この鋼材種別の言い方は、保証破断強度が 41kgf/mm² の材料を言います。2000 年以降は、SI 単位系を採用するようになって、SS400 です。これは保証破断強度が 400 N/mm² という意味です。秤量レンジは、50kN、100kN、200kN となります。
(解：20tf のレンジが適当でしょう。なお、鋼材種別の知識は材料学の方です)
- (4) 断面積一定の鋼の長い針金を、仮に鉛直に吊り下げたとき、針金の自重に耐える最大長さは幾らか？ ただし、鋼の単位重量は 7850kgf/m³、材料の降伏点は 2300kgf/cm² とする。真っ直ぐに吊り下げたと仮定すると、伸びは幾らか？
(解：最大長さ 2930m、伸び 160cm)
- (5) 等断面でコンクリート製の塔柱を作るとして、最大可能高さは何メートルか？ ただし、コンクリートの単位重量は 2400 kgf/cm²、許容応力度を 60 kgf/cm² で設計する。(解 250m)
(解説：鉄筋コンクリートの建物は、柱や壁の断面積の、約 10 倍程度の床面積の空間を確保する必要があります。そのため、実用する建物高さは 6 階建て、25m 程度が限度です。)
- (6) 塔頂で 500 tf の荷重を支えるコンクリート製の塔柱を設計したい。高さ方向のどの断面でも 40 kgf/cm² の圧縮応力度 (正符号で使います) になるように形を設計したい。高さ 50m の塔の寸法を求めよ。断面形には、円断面と幅一定の矩形断面を比較せよ。材料の単位重量は 2500kgf/m³ とする。

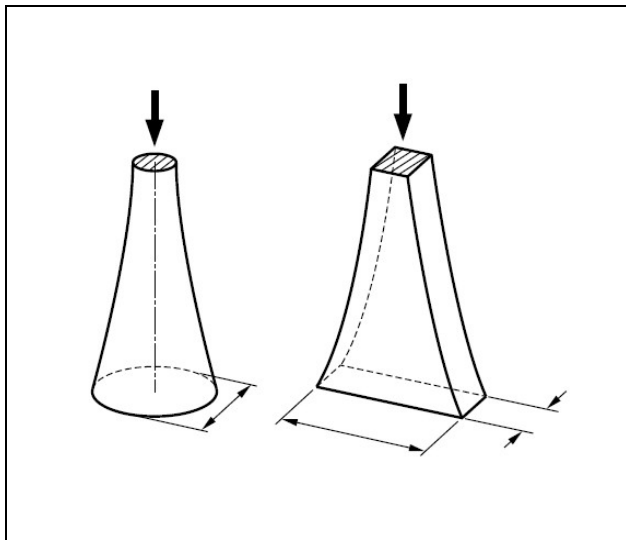


図 1.1

例解：微分方程式を立てて、それを解きます。高さ方向 (下向きを正として) の変数を y 、断面積を A 、単位重量を ρ と置くと、

$$\rho \frac{dA}{dy} = \sigma = \text{一定}$$

面積の解は y の一次式です。

$$A = \frac{\sigma}{\rho} y + A_0$$

塔頂での断面積 A_0 は、(単位系を m にする)

$$A_0 = 500\,000 / (40 \times 1000) = 1.25 \text{ m}^2$$

高さ 1 m 増すごとに断面積は ΔA 増やす；

$$\Delta A = 2500 / (40 \times 10000) = 0.00625 \text{ m}^2$$

高さが 50m 必要であっても底面積は約 1.6m² であって、ピラミッドのようにしなくてよい。

(7) 幾つかの常識問題

- ・ 鋼のヤング率は？ (1.1.6 項の例題解説の中に説明なしで使っています)
- ・ コンクリートのヤング率は？ (鋼のヤング率との比 $n = E_s / E_c \approx 7 \sim 10$ で考えます)
- ・ 鋼材の単位重量は？ (問題 4 の中にあります)
(解説：単位重量とは、工学的な風袋重量です。物理学的な密度、比重と区別して使います)
- ・ 鋼材 SS41 の保証破断強度は？ また降伏点はどの程度か？ (問題 3 の中にあります)
(解説：軟鋼では、保証破断強度/降伏点は約 3/2 です。高張力鋼材は降伏点が高い鋼材です)
- ・ コンクリートの圧縮強さは？ (円柱供試体の圧縮強度で 150~400kgf/cm² 程度です)
- ・ 土木構造物の安全率の標準は幾つか？ (破壊や崩壊に対して 3、降伏に対して 2 です)

1.2 組み合わせ部材の引張りと圧縮

1.2.1 剛性と弾性の表し方

力が作用して変形する現象の捉え方は、力の方で考えるか、変形の方で考えるかを使い分けます。材料を使う状態では、差し当たって破壊のことは考えません。硬軟の区別は、破壊と関係します。変形「し易いか・し難いか」の区別を言う英語の用語では、前者は *elasticity*, *flexibility*、後者は *stiffness*, *rigidity* を見ます。引張材・圧縮材を構造物の要素として使用する場合の力学的な挙動は、これをバネの作用と考えるのが理解し易いでしょう。例えば、引張りの外力 P を受ける長さ L の部材の伸び ΔL は、

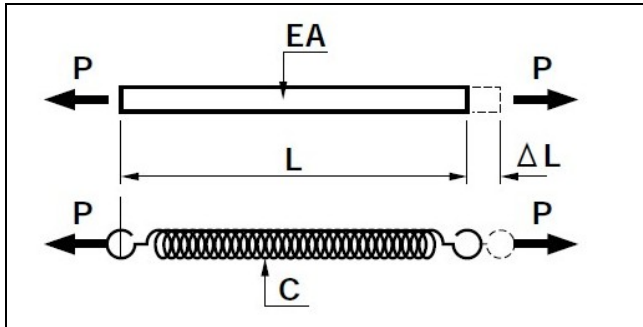


図 1.2

$$\Delta L = \frac{P}{(EA/L)} = \frac{P}{C} \quad \dots(1.4)$$

と書き換えます。ここで C を；

$$C = \frac{EA}{L} \quad \dots(1.5)$$

と置いたものは、長さ L の弾性棒をバネ強さ（剛性）の作用に見立てたときの定数です。単位の伸びまたは縮みを起こすときの、力のディメンションを持ちます。

バネ定数 C として見るとき、この逆数は、単位の力を受けるときの変形のディメンションになります。力が作用していても、実質的な変形が 0 の場合もありますので、数値的には C が非常に大きな数になって、実用的な数値計算に使うときに困ることがあります。そのため、ヤング率 E を抽象化した定数として式の中で扱い、材料違いを考える実際の数値計算ではヤング率の比を使うことが多く見られます。これは、後の 1.2.3 項で解説しますが、鉄筋コンクリート部材を扱うときに実用される n がそうです。

1.2.2 並列部材と直列部材

材料を組み合わせ、見掛け上一つの引張材・圧縮材に構成する例は多く見られます。力学的には、基本系として、図 1.3 と図 1.4 に見るように並列構成と直列構成とがあります。

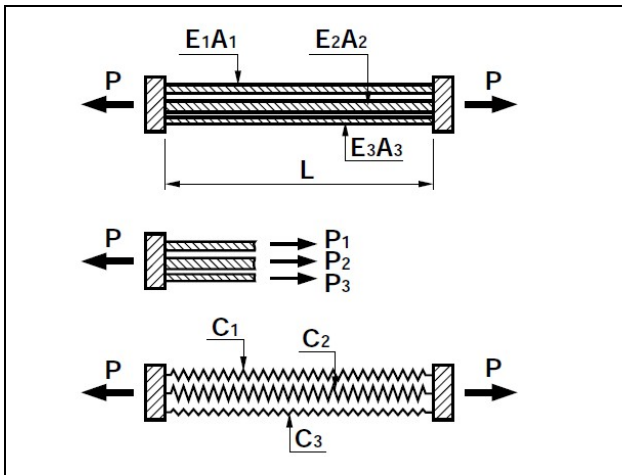


図 1.3 部材の並列

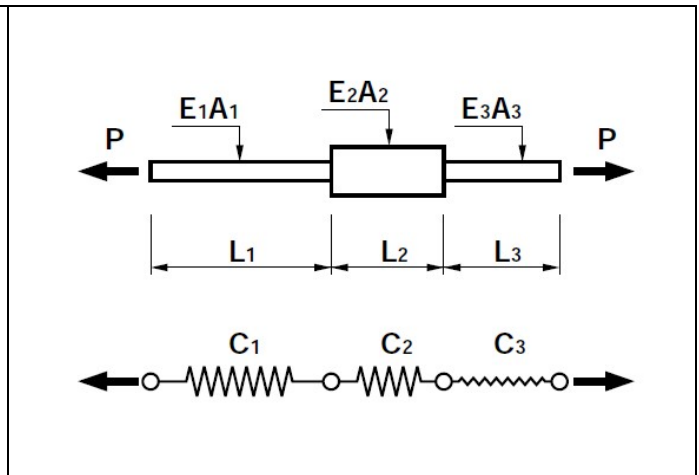


図 1.4 部材の直列

組み合わせた部材全体に作用させる力と変形とを扱うときは、バネ定数違いの材料の組み合わせを考える方が便利です。図 1.4 の直列構成では、個別の部材長さが異なることもありますので、部材長さが表に出ないバネ定数で扱う方が便利です。並列の場合の構成では、後で説明する **不静定** のことを考えることがあります。ここでは、個別の部材は長さが同じで、力が作用しない状態では応力度が 0 である初期条件を考えます。力 P と変形 ΔL との関係は下のようになります。

<p>並列の場合</p> $\Delta L = \frac{P}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots} \quad \dots(1.6)$	<p>直列の場合</p> $\Delta L = P \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \right) \quad \dots(1.7)$
--	---

1.2.3 材料を組み合わせて一つの部材に換算する

鉄筋コンクリートの部材は、コンクリート断面だけで構成するときの補強に、鉄筋や鉄骨を使う組み合わせ部材です。柱として使うとき、力学モデルは上の項で説明した並列構造です。鋼とコンクリートと、それぞれの断面積とヤング率とを E_S, E_C, A_S, A_C としたとき、この全体を一つの柱材料に換算する方法が実用されています。

$$\text{換算の剛性} \quad \overline{EA} = E_S A_S + E_C A_C \quad \dots(1.8)$$

鋼断面およびコンクリート断面で受け持つ力は、それぞれの剛性の大きさに比例します。コンクリート工学では、鋼の断面をコンクリート断面に換算する方法が使われます。

$$E_C \overline{A_C} = E_C (A_C + n A_S) \quad \dots(1.9)$$

ただし

$$n = \frac{E_S}{E_C} \quad \dots(1.10)$$

鋼材料を主材料にする合成桁の場合には、コンクリート断面の方を $(1/n)$ 倍して鋼断面に換算します。 n の数値は実験的に求めるのですが、構造計算や設計計算のときの条件で種々の値が選択されます。弾性変形を考えると、 $n = 7 \sim 10$ が使われますが、断面設計などでは $n = 15$ または、それ以上の大きな数値も採用されます。鉄筋コンクリート柱では、鉄筋がコンクリートの中に埋め込まれているので、コンクリートの純断面積は柱全断面から鉄筋断面積を控除するのが理論的には正しいのです。しかし n の値が 7 以上であることと、鉄筋の使用量が多くてもコンクリート断面積の約 3% 程度ですので、式(1.9)を扱うとき、実務では柱の断面積すべてをコンクリート断面とした計算もします。

演習例題 1.2

- (1) 図 1.5 に示すように、上下で一定高さに拘束されている同材料の組み合わせ柱がある。柱の中程に荷重 P が作用するとして上下の柱の応力を求めよ。

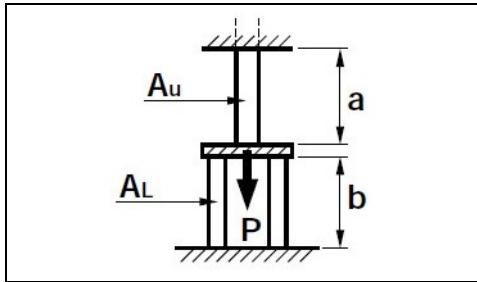


図 1.5

(解のヒント) 上の部材は引張り力 T が作用し、下の部材は圧縮力として $(P - T)$ が作用し、どちらも同じ変形量 ΔL になる条件で式を立てます。

$$\Delta L = \frac{aT}{EA_U} = \frac{b(P - T)}{EA_L}$$

外力 P は、引張と圧縮の符号を考えなければ、上下の部材のバネ定数 (EA/L) の比で分担されます。変形を考えないと応力が計算できない構造を不静定と言います。

- (2) 30cm×30cm のコンクリート柱に断面積 $A_S = 70\text{cm}^2$ の I 型鋼が埋め込まれている。高さ 8m、荷重 $P = 96\text{tf}$ の圧縮力を受けるときの、応力と柱の歪みを求めよ。ただし $n = 7$ とする。

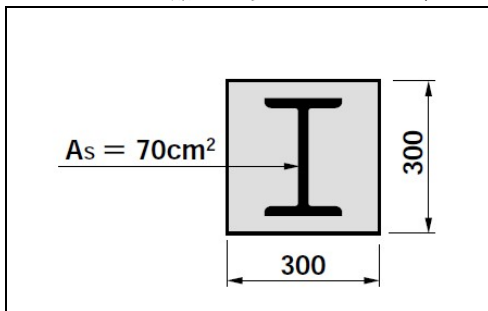


図 1.6

(解)

$$A_C + n A_S = 30 \times 30 + 7 \times 70 = 1\,390 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_C = 96\,000 / 1\,390 = 69 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_S = n \sigma_C = 7 \times 69 = 483 \text{ kgf/cm}^2$$

(解説: この断面も原理的には不静定部材ですが、換算断面積を求めて応力を計算できます。なお、鋼材は断面積が約 8% あります。鋼断面控除を考えるならば、 $n = 7 - 1 = 6$ を使います)

1.3 偏心载荷を考える簡単な組み合わせ構造

1.3.1 偏心して作用する力を受ける構造

単独に考える真っ直ぐな引張材・圧縮材の力学モデルは、細い棒です。実際の部材は或る断面積がありますが、断面の重心を通る軸を直線材とする力学モデルで図示します。或る断面形状をした部材は、細い棒状の部材を束ねたと考えます。この扱いは、第4章で説明します。ここでは、数個のバネの集合で構成するモデルを解説します。まず、水平な台に等間隔に並べたバネで、曲げ剛性の大きな梁を支え、その梁の上から荷重を載せる力学モデルを説明します（図1.7）。

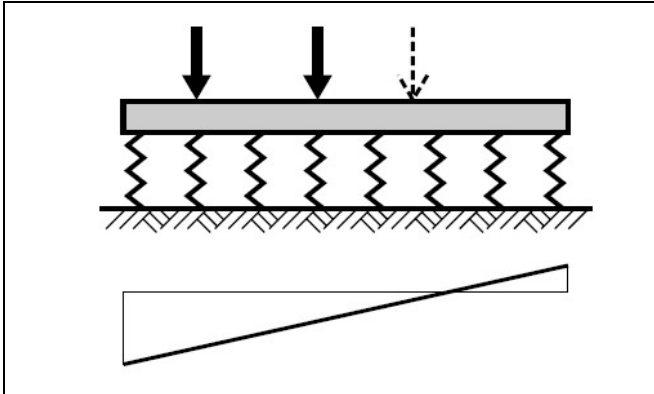


図 1.7 バネで支える剛な梁モデル

このモデルは、バネ支承の本数が増えても簡単に解析できて、種々の場面で考えられています。バネが等分布している場合の例は、弾性的な地盤の上に建物の剛な基礎構造が載っているモデルとして扱います。矩形断面の圧縮材に軸力が偏心して作用するとき、最初に平面であった断面形が圧縮力を受けて変形しても、断面が平面を保つ平面保持の仮定を使います。橋梁工学では、並列した何本かの主桁を支間中央の分配横桁で繋ぐ格子構造を解析するとき、主桁の作用が横桁に対してバネ支承になる構造を考えるのもそうです。

1.3.2 構造力学的には一次の不静定である

図1.7の形式で、バネ支承が2か所であれば単純支持の梁ですので、支点反力は釣り合い条件だけで計算できます。支承の数が3以上であれば、構造力学的には一次の不静定であって、バネの弾性的な性質を考えなければ解析できません。しかし、梁の曲げ剛性が十分に大きければ、条件が簡単になります。数学的な未知数が多くても、構造力学的には一次の不静定と同じです。実用される計算では、数学的に未知数を立てて連立方程式を解くまでもありません。全体が圧縮を受ける場合と、左右逆対称の荷重の組みが作用する場合との二つを解いておいて、その重ね合わせで計算します。この計算法は、梁に軸力と曲げモーメントとを独立に作用させて応力度の分布を計算する場合（第4章）で扱います。

1.3.3 非線形の構造モデルを扱うことがある

図1.7の解を考えると、普通、バネは圧縮にも引張りにも変形することを仮定します。しかし、ここでは、荷重が偏心して作用するとき、反対側のバネの個所が浮き上がり、引張力を持たない場合の力学モデルを考えます。このバネは、圧縮力にだけ弾性的に働き、引張力にはバネが浮き上がって抵抗しないと仮定します。これを、弾性的な性質が対称では無いと言い、非線形弾性の一例です。非線形の弾性体で力と変形の計算をするときは、重ね合わせの法則を使うことができません。次ページの問題で扱う図1.9は、細い鋼棒で剛な梁を吊り下げる力学モデルを吊り下げた構造です。次ページの演習問題(2)では、この鋼棒は圧縮力も受ける、弾性的に圧縮と引張に対称性があるとして解きます。この図は図1.7を上下逆にして示したたものです。この場合、もし細い針金を使えば、圧縮力を受けると簡単に曲がってしまいますので、ここでの使い方も、非線形の力学モデルです。一方、コンクリート材料は、圧縮力にはかなり大きな耐力を持ちますが、引張り強度は圧縮耐力の1/7程度しかありません。したがって、鉄筋コンクリート構造物を設計するときの実用計算では、引張り強度が0である非線形の弾性体として応力度の計算をします。このことが、鉄筋コンクリート部材の実用的な設計計算法を、幾らか複雑にしています。

演習例題 1.3

- (1) 図 1.8 に示すように 2 本の柱の圧縮力はどのような割合になるか？ ただし、曲げなどの影響は考えないとする。 P の位置を考えて柱の応力を求めよ。

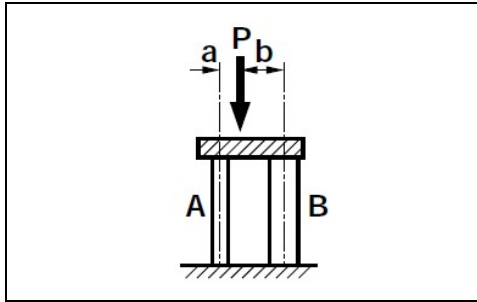


図 1.8

(解説) 第一義的には荷重 P の作用位置で比例配分した圧縮力が作用します。柱の曲げ剛性も考えてラーメン構造を考えると、3 次の不静定構造ですので、弾性条件を考えて解かなければなりません。実際の構造物は、なるべくなら不静定次数が 0 になるように設計します。この構造では、柱を橋脚とし、その上に単純梁を載せるような力学モデルを考えます。力学的に単純化してモデルの例を以下の問題にしました。

- (2) 三本の等しい鋼棒で、剛体と見なせる梁を等間隔で吊り下げます。図 1.9 に示すように、荷重 P_1 、 P_2 を作用させたときの鋼棒の応力を求めよ。

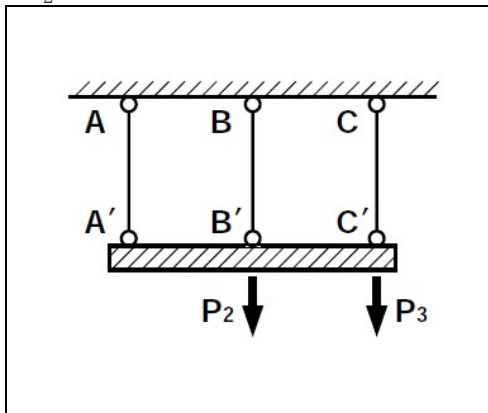


図 1.9

(解) 部材の応力を P_A 、 P_B 、 P_C とする。

$$P_A = (1/3)P_1 - (1/6)P_2$$

$$P_B = (1/3)P_1 + (1/3)P_2$$

$$P_C = (1/3)P_1 + (5/6)P_2$$

(解説：この構造構成は、構造力学的に見れば不静定です。しかし、実践的に解くときは、重ね合わせの方法を使います。中央に荷重が作用しているとき、外力は 3 等分されて鋼棒に伝わります。 P_2 の外力は、左右に $\pm P_2/2$ と中央に P_2 を作用させた場合との和で合成します。**重ね合わせの方法**が使えるのは線形弾性の場合に限る便利な方法です。)

- (3) 上の問題で、鋼棒 BB' の断面積が他の鋼棒の 2 倍であるときの応力を求めよ

(解) 部材の応力を P_A 、 P_B 、 P_C とする。

$$P_A = (1/4)P_1 - (1/4)P_2$$

$$P_B = (1/4)P_1 + (1/4)P_2$$

$$P_C = (1/4)P_1 + (3/4)P_2$$

(解説：この構造も左右対称ですので、弾性方程式を考えるまでもなく、重ね合わせの方法で解くことができます。)

- (4) 上の問題をさらに拡張して、4 本の鋼棒を等間隔に配置した場合の鋼棒の応力を求めよ。

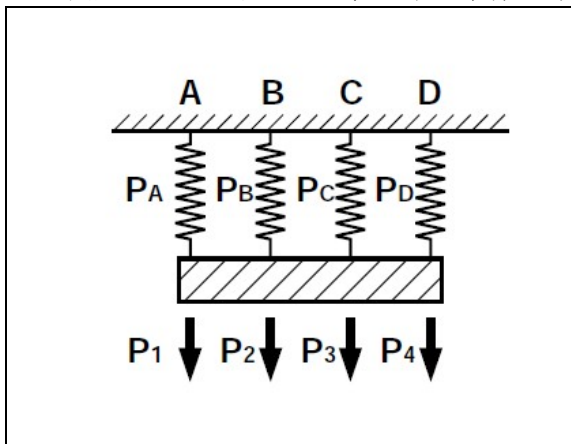


図 1.10

(解)

$$P_A = (7P_1 + 4P_2 + P_3 - 2P_4)/10$$

$$P_B = (4P_1 + 3P_2 + 2P_3 + P_4)/10$$

$$P_C = (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)/10$$

$$P_D = (-2P_1 + P_2 + 4P_3 + 7P_4)/10$$

(解説：弾性方程式を立てて不静定構造として解きます。演習のために釣り合い条件と弾性条件の式を考えて解いて下さい。梁の曲げ剛性が十分に大きい場合には、曲げ部材に偏心軸力が作用するとして解くのが簡単です。この扱いは、第 4 章で説明します。圧縮力が作用するとき、部材の応力を 0 とする場合の解も考えて下さい)

1.4 温度応力・残留応力などの不静定問題

二つの材料の組み合わせで作られている部材があって、一方が他方に較べて温度差があると、そのままでは歪みに食い違いができます。一体化になっているときは、この歪みを打ち消すように内部で応力の変化が生じます。この問題を解く考え方を説明します。

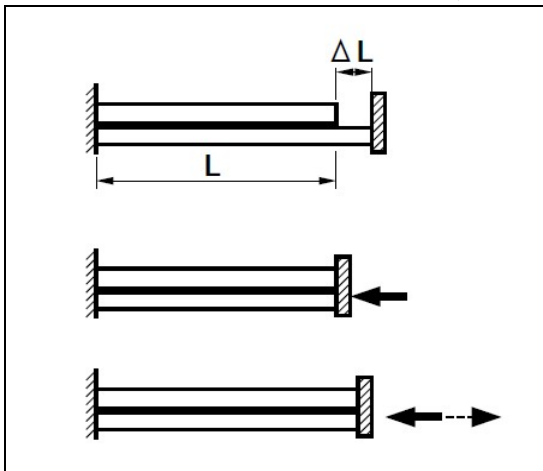


図 1.11

- 1) まず、二つの材料の、相互の結合を緩めて、自由に変形させます。
- 2) 温度差応力を計算するときは、温度膨張係数を使います。鋼材、コンクリート材では、 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ です。
- 3) 次に外から仮の力を作用させて、この変形を無くすようにします。図 1.11 では下側の部材に圧縮力を作用させますが、上の部材に引張り力を作用させても結果は同じになります。このときの応力度は、 $\sigma = t \alpha E$ 、力は $P = \sigma A$ です。
- 4) この状態で二つの材料を結合します。そうしておいて、外から加えている力を抜きます。これは、合成した全断面に、反対向きの力を加えます。例図では引張り力を加えます。この手順を一つの計算式にまとめるよりは、手順に沿って数値計算をする方が分かり易いでしょう。

材料内部での応力分布は、実際にはよく分からないことが多いものです。力学モデルとして、もし部材を自由におけば生じるであろう歪みを考えます。これには材料の乾燥収縮などがあります。履歴が分からない応力が残っているとき、これを残留応力と言います。

演習例題 1.4

- (1) 図 1.11 の例題です。二本の鋼棒が両端で拘束されている力学モデルを考える。上下の鋼棒の断面積を $A_U = 0.5 A_L$ とする。上側が陽に照らされて 25°C だけ温度が高くなったとして、上下の鋼棒の応力を求めよ。ただし、線膨張係数は、 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ 、ヤング率は $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ とする。
(例解) 自由に変形させたとして、上の鋼棒の歪みは、 $\varepsilon = 25 \times 1.2 \times 10^{-5} = 30 \times 10^{-5}$ 。これを単独に押し戻すときの応力度は $\sigma_U = -E \varepsilon = -630 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 。その圧縮応力は $P = \sigma_U A_U$ 。この力を引張り力として全断面 ($A_U + A_L = 3A_U$) に作用させる。したがって、下側の鋼棒は始めて引張り応力が作用するので、その応力度は、 $\sigma_L = +630/3 = 210$ 。上側の鋼棒は、 $\sigma_U = -630 + 210 = -420 \text{ kgf/cm}^2$ 。
- (2) 常温で継ぎ目の無いように敷設されたロングレールが 20°C の温度上昇をしたときに応力を求めよ。線膨張係数は、 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ 、ヤング率は $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ とする。(解: 504 kgf/cm^2)
- (3) 外径 $D = 30\text{cm}$ 、長さ 10m のコンクリート柱の中央に $d = 2\text{cm}$ の鋼棒を通し、柱の両端にネジを切り、座金を当ててボルトで締める。鋼棒を最初の長さから 1.5cm 詰める。コンクリート柱と鋼棒の応力度を求めよ (PS コンクリートのポストテンション工法の原理)。
(解: 鋼材のヤング率を $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $n = 7$ とすると、 $\sigma_c = -14 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\sigma_s = 3055 \text{ kgf/cm}^2$)
- (4) 断面積 5cm^2 のピアノ線を $\sigma_s = 3000 \text{ kgf/cm}^2$ の張力で引っ張っておき、その周囲を $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ の矩形断面になるようにコンクリートを打つ。コンクリートに十分な強度が発現したところで部材端のピアノ線を切って柱を作る。コンクリートとピアノ線の応力度を求めよ。 $n = 7$ とする (PS コンクリートのプレテンション工法の原理)。(解: $\sigma_c = -24 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\sigma_s = 2835 \text{ kgf/cm}^2$)
- (5) 図 1.6 の鉄骨コンクリートの断面を例題とする。コンクリートが乾燥収縮によって、 $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ の収縮歪みを生じるとして、コンクリートと鋼の応力度を求めよ。
(解: $\sigma_c = 32 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\sigma_s = -222 \text{ kgf/cm}^2$)

1.5 曲がった引張り材

力の釣り合いは、糸を張ったモデルでの説明が良く使われます(図 1.12)。折れ曲がった個所での力の釣り合いは、三角形を考えれば容易に解析できます。この場合に力は、ベクトルの計算を応用します。滑らかな曲線を描く形状は、曲線に垂直な方向の分布荷重を考慮して釣り合い条件を考えます。この場合には、曲線の曲率を考慮しなければなりません(図 1.13)。曲線を描く引張り材の例を三つあげます。一つは、送電線の形状を表すカテナリ曲線(懸垂線: catenary)です。数学の問題として挑戦して下さい。二つ目は吊橋のケーブル形状に見るような**方物線**です。これは、橋梁工学で扱います。三つ目はリング状に構成する部材であって、内水圧を受けるパイプ構造の円周周りの応力であって、**フープテンション**(hoop tension)と言います。鉄筋コンクリート柱では、**螺旋鉄筋柱**の設計に応用されています。圧縮力が柱に作用するとき、半径方向にポアソン係数分の膨張を抑えるため、円周方向にリング状の鉄筋を巻きます。そうしない鉄筋コンクリートの柱よりも対荷力が上がります。曲線形の圧縮材は、アーチ構造に使いますが、こちらは部材の曲げ剛性も考える必要がありますので、ここでは説明しません。

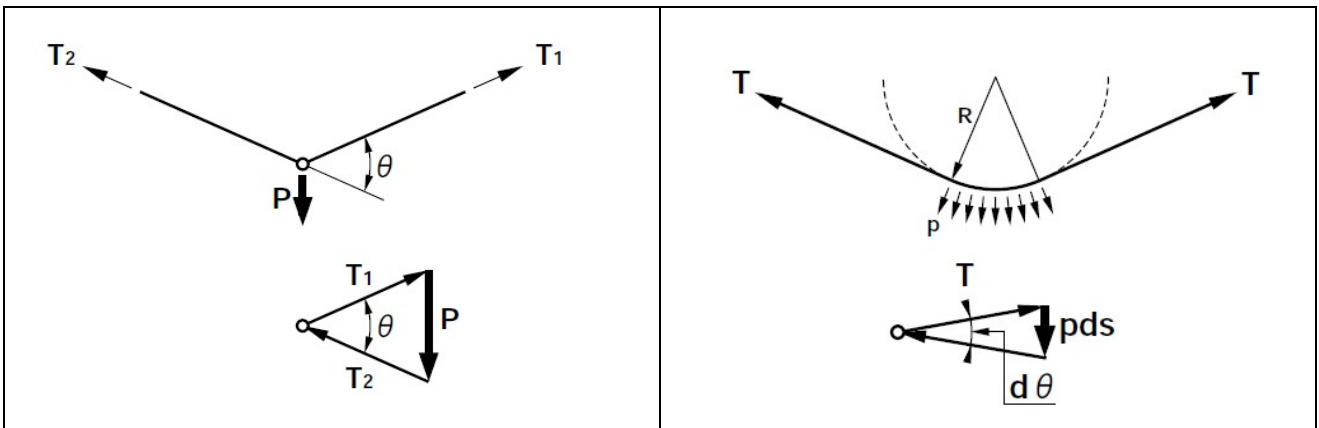


図 1.12

図 1.13

軸力 T だけを受ける線材が曲線変形する形状の力学を考えるときは、曲線に沿って測る一次元の曲線座標 s を考えます。一般的に考えると複雑ですが、多く実用されるのは円弧を描く場合です。微分方程式で表すと、

$$\left. \begin{aligned} Td\theta &= pds \\ k &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \quad \dots(\text{曲率}) \\ p &= \frac{T}{R} \quad \dots(\text{横荷重}) \end{aligned} \right\} \dots(1.13)$$

R を曲率半径、 k を曲率と言います。

演習例題 1.5

- (1) 板厚 $t = 1.2\text{cm}$ 、直径 $D = 3\text{m}$ の**水圧鉄管**(ペンストック: penstock) が水頭 15m の内圧を受けている。パイプ材のフープテンションを求めよ。(解: 187.5 kgf/cm^2)
- (2) 板厚 $t_1 = 1.2\text{cm}$ 、内径 $d = 30\text{cm}$ の鋼管を高温度 120°C で熱しておいて、常温 20°C 、外径 $d = 30\text{cm}$ 、肉厚 $t_2 = 1.5\text{cm}$ の鋼管に焼きばめしたとする。全体が 20°C になったとき、内外の鋼管の円周方向応力を求めよ。温度膨張係数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$ 、ヤング率は、温度に関係なく、 $E = 2.1 \times 10^6\text{ kgf/cm}^2$ と仮定する。(解: $\sigma_1 = 2100\text{ kgf/cm}^2$ 、 $\sigma_2 = -1680\text{ kgf/cm}^2$)

2. 簡単なトラスの応力と変形

2.1 静定トラス

2.1.1 トラスは鋼構造に用いられる

トラス(truss)は、圧縮力または引張力だけを伝えるようにした、細長い真っ直ぐな部材を組み合わせて、構造物に組み上げるときの基本形です。幾何学的な構成は三角形を組み合わせます。古典的な建築構造は、柱を垂直に使い、水平に支える梁と組み合わせることを基本とします。斜めに部材を使うのは、屋根のような限られた個所であって、主部材を斜めに使いません。寺社建築がそうです。ギリシャの神殿構造に見るように、古代の巨大建築は、多柱構造です。トラスは、産業革命で大量の鉄鋼が利用できるようになったことと、鉄道橋のように、大きな重量を支える構造を工夫することから実用化が研究された構造形式です。トラスの組み方を言うときに、ハウトラス、プラットトラス、ワーレントラスなどと言います。これは、組み方について特許を申請した人の名前に由ります。トラスの解析は、構造力学の方で主に扱いますが、基本的な知識については理解しておく必要があります。トラスは、引張力を受ける部材があります。木材や石材は、大きな力を伝える引張り材としての使い方には向きません。鉄鋼材料であれば、信頼できる引張材に構成することができます。しかし、引張材を結合する格点の技術的構造を工夫しなければなりません。ここから材料力学の多くの課題が研究されるようになりました。最も単純な引張り部材は、リングを繋ぐ鎖構造です。チェーンは、部材両端に穴を空け、ピンを通して繋ぎ、自由に曲がる使い方ができます。自転車やオートバイの駆動部分に見られます。構造物に使う場合、古くは、両端を鍛造などで穴に加工してピン結合にしました。大きな変形を許す構造ではありませんが、理論的に曲げが伝わらないようにする目的を持たせます。長さが短い引張材は、両端に穴を空けた形が眼鏡のフレームと似ることから、アイバー(eye-bar)と言いました。古い鉄道橋にはこの形式の引張材を使ったピントラス橋がありました。しかし、格点を剛に結合しても支障がありません。ピントラス橋に構成すると、ピンの個所がかえって振動や騒音が問題になりますので、現在の鋼構造物ではピントラスを採用することはありません。ただし、力学原理を説明するとき、格点で自由に回転できて、曲げを持たせない直線部材であることを示す丸を描いて、ピン結合の仮定を示す説明図を使います。

2.1.2 簡単な平面トラス

実際のトラス構造は、平面トラスに構成することが基本です。3本の部材を三角形に組んだ形を順々に接続させて構成します。立体的なトラスに構成する場合であっても、平面トラス単位を二次元的な板のように組み合わせます。三角形の頂点を、応用力学では節点(node)と言いますが、橋梁工学では格点(panel point)と使います。この著作では格点の方を使います。力学的な仮定は、部材の中間に横からの力が作用しないように、また、節点で接続部材に曲げが働かないとして、軸力だけの釣り合いを計算します。トラスを解くこととは、大きな変形をしないように構成した全体に外力が作用したときの、個々の部材力を求めることです。実際の構造物では、トラスの格点を構成することが技術的に重要な課題です。トラス全体は、大きな移動も回転も起こさないように支える必要があつて、大地との接続を構成する格点を支点(support)と言います。橋梁構造の支点は、特別な部品として支承(bearing support)を使います。技術用語では査(くつ: shoe)とも言います。主として鉛直方向の反力を受ける目的で設計しますが、回転ができるようにピン構造が使われます。水平変位も拘束する個所を固定支点、温度変化などによる水平変位などを逃がす個所を可動支点(図 2.1a) とします。

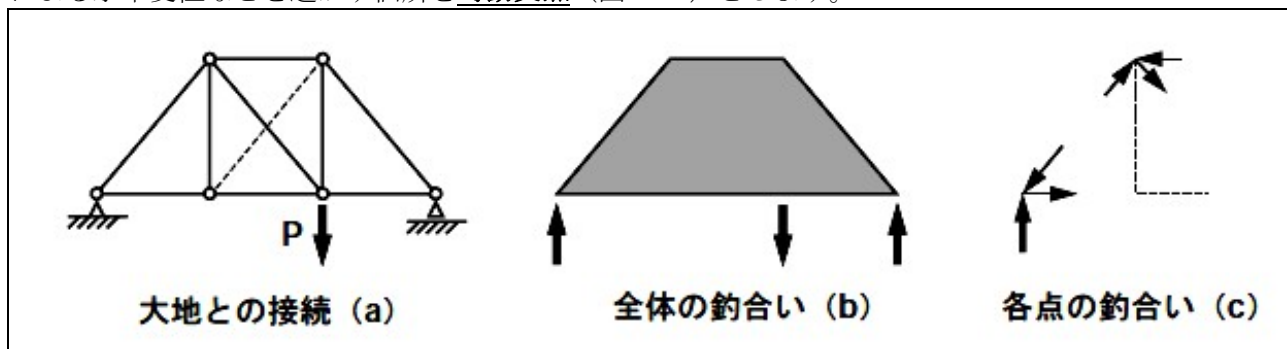


図 2.1 平面トラスの力学モデル

2.1.3 静定平面トラスの解析

トラスの解析は、格点での部材力の釣り合いを考えるのが基本です（図 2.1c）。格点では、その格点に向かって向きを持った部材力と外力とが作用するとして、力の釣り合いを考えます。力をベクトル的に見て、ベクトルをすべて加算すると 0 になるとする条件が釣り合い条件です。ベクトルを垂直成分と水平成分に分けて、代数的な釣り合い条件を、説明的に $\sum V = \sum H = 0$ と書きます。トラスの格点は、外力と部材力を含めて、少なくとも 3 つの力が集まります。二つの部材力を残し、それ以外の力が分かれば、未知の部材力が計算できます。或る個所の格点で部材力と外力のすべてが分かれば、隣接する格点での部材力を芋づる式に計算することができます。この解法を節点法と言います。解析の出発にする格点を、支点にするのが普通です。支点反力は、トラス全体に作用する外力を考え、全体の釣り合い条件を使います（図 2.1b）。このときは、或る支点に注目してモーメントの釣り合い条件を加えた三つの条件であって、上の条件と合わせて、説明的には $\sum V = \sum H = \sum M = 0$ と書きます。力の釣り合い条件だけで、すべての部材力の計算ができるトラスは、静定で安定であると言います。

2.1.4 内的に静定で安定である条件

トラスの解析方法は構造力学の課題ですので、ここでは深入りしません。しかし、静定と安定の理解は重要ですので、原理について解説しておきます。平面トラスは、幾何学的に三角形に組み上げる方法を繰り返して構成します。既に位置が決まっている 2 格点から 2 本の部材を使えば、新しい格点の位置が決まります。つまり、すでに在る部材数 (M) に二本を追加すれば、格点数 (N) が一つ増えます。最初の三角形は $M = N = 3$ ですので、単独に取り出して静定で安定なトラスの条件は、丸暗記しなくても、次の式が簡単に誘導できます。

$$\text{静定で安定な平面トラスの条件} \quad M = 2N - 3 \quad \dots(2.1)$$

同じ考え方を立体トラスでも応用できます。独立に取り出して静定で安定な立体トラス組みは三角錐状の構造であって、部材数 $M = 6$ 、格点数 $N = 4$ です。既に決まっている 3 格点から 3 本の部材を使うと新しい格点の一つ増えます。

$$\text{静定で安定な立体トラスの条件} \quad M = 3N - 6 \quad \dots(2.2)$$

上の構成原理で組み上げたトラス構造は、内的に安定(static)で静定(determinate)であると言います。ただし、全体図形は、形を保ったまま移動や回転ができます(mobile)ので、外的には不安定です。この単独構造で、どれか一本でも部材を取り去ると、どこかのヒンジ回りに自由な回転ができるようになって、元の形を保つことができません(不安定)。逆に、どれかの 2 格点を結ぶように余分の部材を追加すると、このトラスは追加部材数だけの不静定次数のトラスになります。これは、トラスに外力を作用させて部材の応力を計算するとき、力の釣り合い条件だけで解くことができなくて、不静定次数個の弾性条件を立てなければなりません。

2.1.5 外的に安定で静定を判定するには支点到に仮想の部材を考える

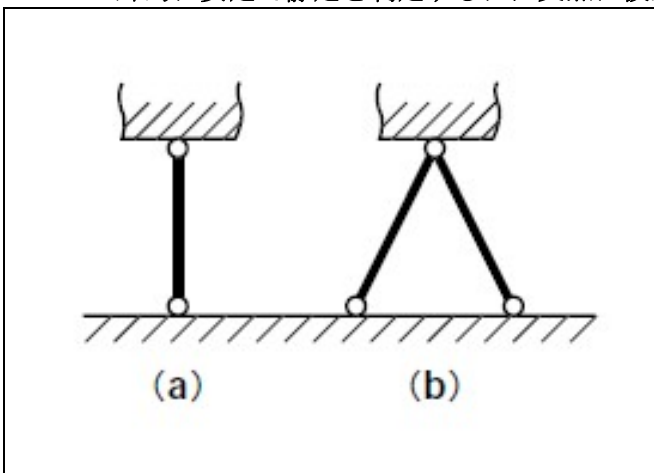


図 2.2 可動支点（左）と固定支点（右）の原理

橋梁構造に利用するトラス構造は、支点到に大地と接続させて外的に安定な構造に構成します。支点反力には、小寸法のトラス部材を描きます（図 2.2）。可動支点は 1 本、固定支点は 2 本の追加の仮想部材を考えます。反力成分を含め、トラス本体に作用する外力との釣り合い条件 $\sum V = \sum H = \sum M = 0$ を満たすように解きます。大地側の格点数は加えません。外的に静定で安定を判定するときは、式 2.1 右辺の整数 3 を省きます。内的に安定なトラスを支える仮想の支点到部材数は 3 です。これより部材数が多くなるときは、外的に不静定支持になります。このとき、静定に組み上げたトラス部材数を減らせば、全体として外的に静定で安定な構造にすることができます。

2.1.6 立体トラスの支点も仮想の部材を考える

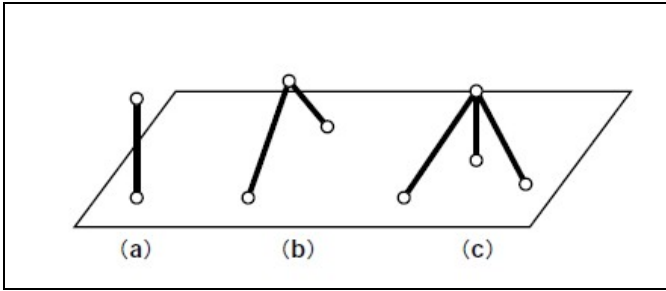


図 2.3 立体トラスの支点での力の成分

構造物は、基本的に立体構造物です。実用される構造は、解析の手間を簡単にするため、平面トラスを面で扱い、全体を箱のように組み立てます。面単位のトラスは、独立に平面トラスとして解析できるような構造が工夫されます。単独で形が崩れない立体トラスを大地と繋ぐ支点が必要ですが、トラス全体に作用する外力と釣り合う支点の反力成分を、擬似的な追加のトラス部材で受け取ります。図 2.3 にその力学モデルを示します。

一物体の立体的に安定な構造を支える方法は、机や椅子にあるように、4脚支持が普通に見られます。しかし、日常経験するように、4脚支持であると一本の脚が遊ぶことがあって、ゴムなどの弾性材料を挟んで不安定さを解消します。単純な橋梁は、平面的に4ヶ所に支承柵を使います。その機構的な構造は図 2.3 の力学原理を踏まえます。支承は、反力を受けることが目的ですが、移動と回転を許す構造でもあることに注意します。図 2.3a は水平2方向、図 2.3b は水平1方向に移動を許す構造です。4ヶ所で橋梁を支えるときは、図 2.3b と図 2.3c の原理の支承を一か所ずつ、図 2.3a の原理の支承を二ヶ所使います。そうすると、反力成分相当の部材数が7本になります。全体の釣り合い条件は、力とモーメントとを含めて6成分ですので、外的に1次の不静定支持になります。橋梁では全体構造の弾性変形などを考えてこの不静定条件を解決しますが、4脚の机や椅子がガタつくときは、弾性的なクッション材で解決しています。外的に静定で安定である条件式では、式 2.2 の右辺の6を省きます。

2.1.7 連続体のモデル化

実際の構造材料は、見掛け上、或る連続した外形を持っています。理論的に扱う数学モデルは、マクロに見て均質な連続体の仮定を使い、微分方程式で解析できる条件を考えます。しかし、与えられた条件から数値計算をするときは、飛び飛びの(離散的: discrete)注目点を決めて、有限個数の座標点で計算します。それならば、最初から飛び飛びの座標位置を考えた解析方法を工夫したいところです。この方法の一つは、微分方程式(differential equation)に代えて、階差式(difference equation)を使うことです。しかし、これらの式で解析できるのは、数学的には条件が非常に限られた場合であって、現実に解きたい複雑な形状などに応用することができません。そこで、コンピュータの助けを借りて、数値計算に適した有限要素法(FEM: Finite Element Method)が提案されるようになりました。このアイディアは 1943 年まで遡るとされていますが、ジंकビッチ(O.C.Zienkiewicz (1921- 2009)がダム構造の解析に応用する提案をし、それを元にして 1967 に書いたテキストが多く参照されました。FEM は、幾何学的には、擬似的に接点数と部材数の非常に多い骨組み構造を仮定します。必ずしもピントラスでモデル化ができませんが、構造力学的に見ると、非常に不静定次数の大きな構造です。FEM は、数値計算法の立場から解説しますので、この材料力学では取り上げません。この節では、手計算の範囲で解が得られるような、静定トラスの基礎的な知識を埋める問題を説明します。

2.1.8 トラスの変形

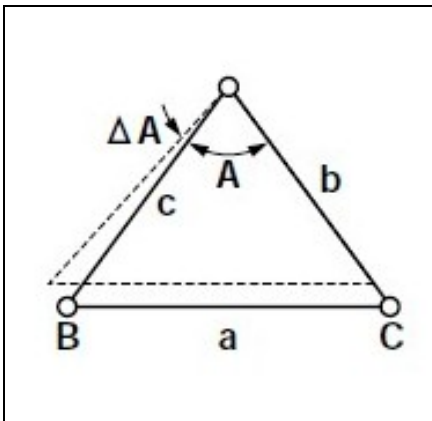


図 2.4 三角形の変形

トラスの変形は、トラスを構成する三角形の微小変形から計算します。三角形の公式は、代表として頂角Aについて示すと、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \dots(2.3)$$

この式の偏微分を求めます。

$$\Delta A \sin A = \frac{a^2}{bc} \varepsilon_a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc} \varepsilon_b - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2bc} \varepsilon_c \quad \dots(2.4)$$

三角形を構成するトラス部材の歪みが分かれば、角度変化が計算できますので、これからトラスの格点位置の移動を順に計算することができます。実用的な計算法はエネルギー法などを応用しますが、図形の幾何学として解く方法も理解しておくのがよいでしょう。

演習例題 2.1

- (1) 図 2.4 に示すように、長さ 5m の 2 本の鋼棒で B 点がピン結合されていて、 $P=5 \text{ tf}$ を受けている。部材の傾斜角は、 $\theta = 30$ 度である。部材の応力度が 1400 kgf/cm^2 となるように鋼棒の所要断面積を求めよ。また、B 点の変位を計算せよ。ヤング率は $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ とする。

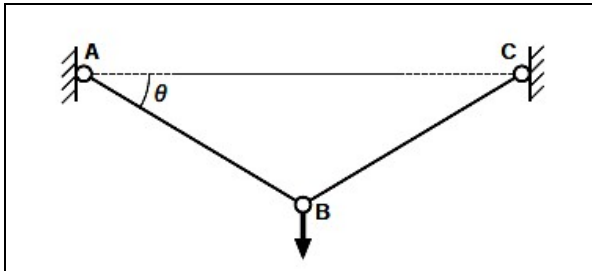


図 2.5

(解：部材力は 5tf、所要断面積は 3.6 cm^2 、直径約 2cm の鋼棒を考慮することができます。鋼棒の伸びは $\Delta L = 0.33 \text{ mm}$ 、撓みは 0.67 mm)

解説：原始的に見えますが、節点法を使います。力の釣り合いを、ベクトルで考え、図を描いて確認します。力の符号に注意します。

- (2) 図 2.6 は、鋼棒を組み上げて構成した簡単な片持ちトラスである。図の a と b とは、三角形の幾何学的構成が異なっていて、引張り材と圧縮材の長さが違う。 $P=30 \text{ tf}$ を吊るとして、B 点での撓み、全体の積算重量を比較せよ。ただし、圧縮材と引張り材の許容応力度は 900 kg/cm^2 と 1400 kg/cm^2 、ヤング率は $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、鋼棒の単位重量は 7850 kg/m^3 とする。

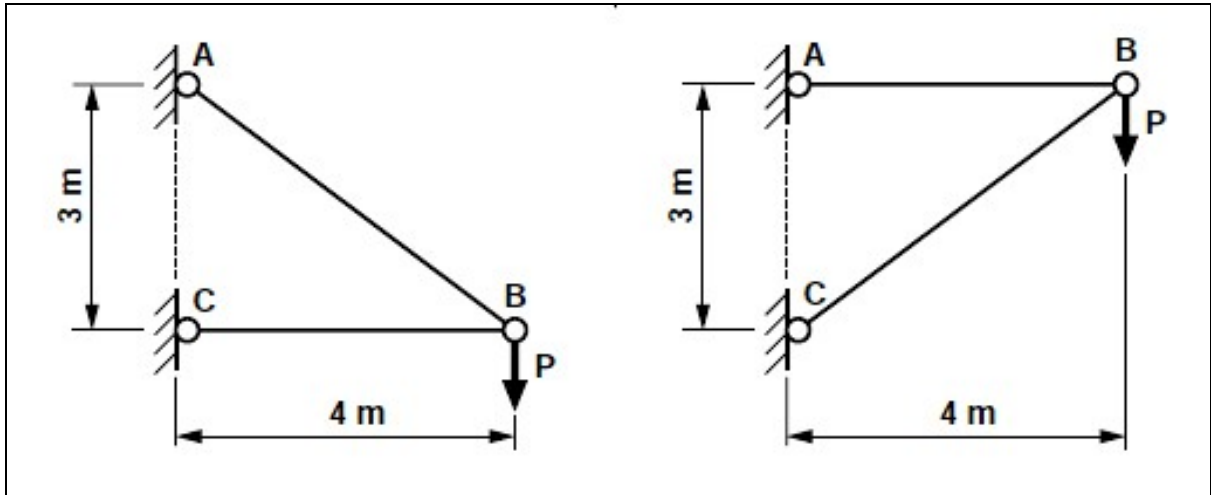


図 2.6a

図 2.6b

(解：280 kg、308 kg、0.68cm、0.71cm)

解説：実務の構造設計では、圧縮材は座屈が起きないように引張り材よりも応力度を抑えます。圧縮材の部材長が短くなるようなトラス組みが工夫されます。斜めの部材は相対的に部材が長くなります。鋼のトラスの形式では、斜材が引張り材になるプラットトラスに組むのが普通です。ハウトラスは、屋根組のような木造トラスで主に採用されます。図 2.1 のトラス組みで、破線で描いた部材を追加した組み方をダブルワーレンと言い、不静定構造です。計算を単純化するため、X 形に組むとき、圧縮材になる部材の方は働かないとする設計仮定がよく使われます。

- (3) 前問の条件を少し変えて、斜材の重量を最小にするように AC の長さを提案せよ。ただし、水平材の長さは 4m と一定にしておく。
(解：図 2.6a では $AC=9\text{m}$ 、図 2.6b では 5.2m)

解説：AC の長さを未知数 X とおけば、斜材の長さが決まります。部材力は三角形の辺の長さ比で得られますので、全体の積算重量が X の関数で得られます。この微分を求め、微分値を 0 にする極小条件で解が得られます。頭の体操として挑戦して下さい。

- (4) 図 2.7 に示す三角形のトラス組みにおいて、部材はすべて断面積 10 cm^2 の鋼棒とする。 $P_1 = 10 \text{ tf}$ 、 $P_2 = 15 \text{ tf}$ として格点の変位を計算せよ。三角形の頂点 B の角度は $\theta = 45^\circ$ とする。

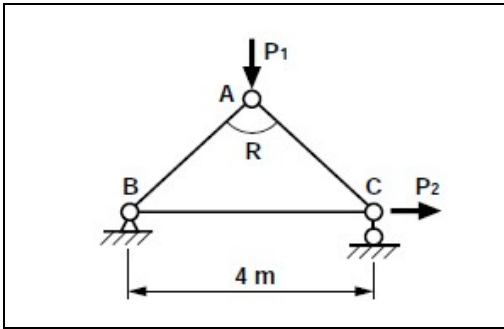


図 2.7

例解：

三角形の頂点 A の角度を 90° としています。外力 P_1 による部材 AB, AC の圧縮力 P_{AB} , P_{AC} は、

$$P_{AB} = P_{AC} = P_1 / 2 \sin 45^\circ = 7.07 \text{ tf}$$

これによる部材 BC の引張力 P_{BC} は、

$$P_{BC} = P_{AB} \cos 45^\circ = 5.0 \text{ tf}$$

$$\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = -7070 / 10 = -707 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{BC} = (5000 + 15000) / 10 = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AC} = (-707 / 2.1 \times 10^6) = -337 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{BC} = (2000 / 2.1 \times 10^6) = 952 \times 10^{-6}$$

頂点 A の垂直および水平の変位は、構造力学的にはエネルギー法で計算しますが、ここでは、教育目的を含めて、幾何学的方法で計算することを例示します（参考としてエネルギー法による計算方法も下に示してあります）。頂点 A は、部材 AB 圧縮で短くなることと、頂点 B を回転中心として微小角度 ΔB だけ右回りに回転することに因る移動とを重ね合わせます。計算の理論式は、式 2.4 です。頂点 B の角度変化を求めますので、 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ と $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ と順送りに変更して利用します。

部材長： $a = b = 2 / \cos 45^\circ = 2.83 \text{ m}$ 、 $c = 4.00 \text{ m}$

部材歪み： $\varepsilon_a = \varepsilon_b = -337 \times 10^{-6}$ 、 $\varepsilon_c = 952 \times 10^{-6}$

$$\frac{b^2}{ca} = \frac{2.83^2}{4 \times 2.83} = 0.707$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ca} = \frac{2.83^2 + 4^2 - 2.83^2}{2 \times 4 \times 2.83} = 0.707$$

$$\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ca} = \frac{2.83^2 + 2.83^2 - 4^2}{2 \times 4 \times 2.83} = 0$$

$$\Delta B \sin B = \Delta B \times 0.707 = 0.707 \times (-337 \times 10^{-6}) - 0.707 \times 952 \times 10^{-6} - 0 = -911 \times 10^{-6}$$

$$\therefore \Delta B = -1289 \times 10^{-6}$$

頂点 A の移動は二つの成分で計算する

部材 AB の長さの変化： $\Delta L = b \varepsilon_b = 283 \times (-337 \times 10^{-6}) = -0.095 \text{ cm}$

部材 AB が回転することによる頂点 A の直交方向の変位： $b \Delta B = 283 \times 1289 \times 10^{-6} = 0.365 \text{ cm}$

頂点 A の垂直変位： $\delta V = \Delta L \times \sin 45^\circ - b \Delta B \cos 45^\circ = -0.325 \text{ cm}$ ；下向きの変位

頂点 A の水平変位： $\delta H = \Delta L \times \cos 45^\circ + b \Delta B \sin 45^\circ = +0.191 \text{ cm}$ ；右向きの変位

頂点 C の水平変位： $\delta H = c \varepsilon_c = +0.381 \text{ cm}$ ；右向きの変位

（備考：頂点 C の水平変位は、頂点 A の水平変位の 2 倍になることが検算になっています）

参考：ここでの頂点 A の変位の幾何学的方法には、クレモナの図式解法 (L. Cremona, 1830-1903) の原理を踏まえています。実務でのトラス計算は、コンピュータを使う計算に向けたエネルギー法が多く使われます。その方法で表計算した例を下に示します（0.325 が一致することが確かめられます）。

部材	断面積 cm^2	部材長 cm	$P_1=1$ による 応力 (tf)	$P_1=10, P_2=15$ による応力 (tf)	エネルギー法による撓みの計算 $\delta = \Sigma / E$ (cm)	
	①	②	③	④	$③ \times ③ \times ② / ①$	$③ \times ④ \times ② / ①$
AB	10	283	-0.707	-7.07	14.15	141.46
AC	10	283	-0.707	-7.07	14.15	141.46
BC	10	400	+0.500	20.00	10.00	400.00
Σ					38.30	682.92
δ_v					0.182	0.325

(5) 図 2.8 に示す二つの平面トラスにおいて、まず、静定・不静定の判別をせよ。ついで、部材断面積を決定し、全重量を積算せよ。ただし、許容応力度は、引張・圧縮に対して、 $900 \text{ kgf/cm}^2 \cdot 400 \text{ kgf/cm}^2$ 、単位重量は 7850 kg/m^3 とする。

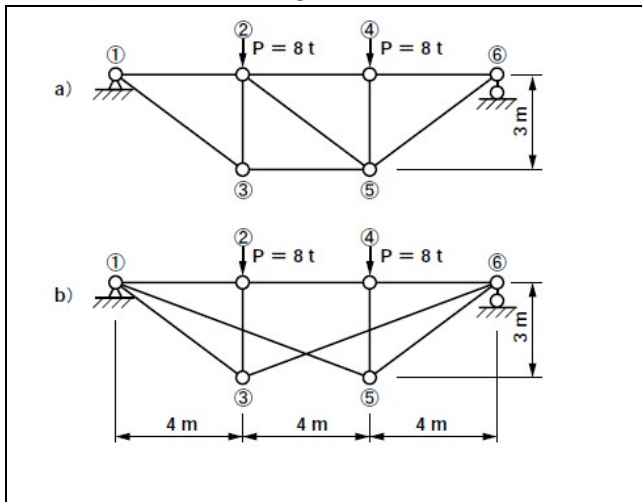


図 2.8

解説：

- 上下のトラス構造、共に部材数 $M=9$ 、格点数 $N=6$ ですので静定トラスです。上のトラス組みは、この章の始めに紹介した図 2.1 を 180° 回転した形式です。下の図では、3本の上弦材の圧縮力がすべて同じ、上の図では右側2本の上弦材の圧縮力が同じになることを、釣り合い条件で勘案します。
- 複雑なトラス構造の計算では、格点と部材に番号付けをし、表の形で計算書をまとめると、見通しが良くなります。どのような順に番号を付けるかに関しても、かなり工夫が必要です。有限要素法 (FEM) の場合、要素の自動分割法などに多くの研究があります。下の表計算で例解を示します。

図 2.8a のトラス計算

部材番号	接続格点	部材長 (m)	部材力 (tf)	所要断面積 (cm^2)	単位長重量 (kg/m)	材料重量 (kg)
1	1-2	4.0	-10.7	26.75	21.0	84.0
2	1-3	5.0	13.3	14.78	11.6	58.0
3	2-3	3.0	-8.0	20	15.7	47.1
4	2-4	4.0	-10.7	26.75	21.0	84.0
5	2-5	5.0	0			
6	3-5	4.0	10.7	11.89	9.3	37.2
7	4-5	3.0	-8.0	20	15.7	47.1
8	4-6	4.0	-10.7	26.75	21.0	84.0
9	5-6	5.0	13.3	14.78	11.6	58.0
Σ						499.4

図 2.8b のトラス計算

部材番号	接続格点	部材長 (m)	部材力 (tf)	所要断面積 (cm^2)	単位長重量 (kg/m)	材料重量 (kg)
1	1-2	4.0	-10.7	26.75	21.0	84.0
2	1-3	5.0	8.9	9.9	7.8	39.0
3	2-3	3.0	-8.0	20	15.7	47.1
4	2-4	4.0	-10.7	26.75	21.0	84.0
5	1-5	8.54	7.59	8.4	6.6	56.4
6	3-6	8.54	7.59	8.4	6.6	56.4
7	4-5	3.0	-8.0	20	15.7	47.1
8	4-6	4.0	-10.7	26.75	21.0	84.0
9	5-6	5.0	8.9	9.9	7.8	39.0
						537.0

参考：表の形で計算を進めると、計算の検査が便利です。最近では、表計算ソフト (spreadsheet program) の MS-EXCEL などの使い勝手が良くなりました。

(解説の続き)

- 例題トラスの外力は、左右対称になるようにしてあります。これは、死荷重を作用させるときの、一つのモデルです。トラス(a)では、部材番号5の応力は0です。計算上はこの部材を必要としませんが、これを省くと不安定トラスになります。実構造の設計では、ここをダブルワーレンのX形に組み、部材長さから決まる、最小の**細長比**の断面を使います。この解説は第4章、4.2.8項で扱います。したがって、材料重量は、ここでの理論計算値よりも大きくなります。
- 実務の設計では、例えば、山形鋼のカタログなどから、所要断面積を満たす材料を選ぶのが普通です。カタログには単位長さ重量が載っていますので、それを使って材料の積算をします。部材力の物理的な単位は力です。理論にこだわるとニュートン単位で計算したくなるのですが、材料の積算は重量を使うことが常識ですので、実務では、最初から力の単位系にも重量単位(kgf, tf など)を使います。
- 例題のトラス構造(b)の上弦材は、一直線になっています。垂直材はこれと直交していますので、もしここに外力が作用しなければ、垂直材の応力は0です。この垂直材が接続する上弦材は圧縮材ですので、垂直材を使うことで、座屈を考えた圧縮材の許容応力度が低くならないようにする目的があります。
- トラス(a)の格点②は斜材がありますので、外力が片側に載ると、斜材2-5に応力ができます。演習として $P_2=8tf$ 、 $P_4=0$ の条件で解いてみて下さい。
- トラス(b)では、部材が図形的に交差しますが、力学仮定は交点での部材の結合はないとします。しかし、実構造では、部材の振れを抑えるように止めるか、格点としての構造を持たせます。ダブルワーレンのX形に組み込む場合も同じです。ダブルワーレンに組み込むと、不静定次数が増えます。実務では、圧縮材になる側の部材を無視して、静定トラスとして解いて断面を決定します。
- トラスの変形を幾何学的に計算して求める方法は、やや難しくなります。この計算は構造力学として扱いますので、ここには含めませんでした。

- (6) 図 2.9 は、箱型に組み上げる骨組みの外形を決める基本構造である。この構造は、単独では内的に不安定である。不足している部材数を求め、その組み上げ方法を考えよ。

解説：

部材数 $M=12$ 、格点数 $N=8$ です。式(2.2)から、部材数が6不足していることが分かります。通常は、6面を構成する四角形に斜材を入れます。紙で箱を作ると、上蓋に相当する面が開いていると変形し易いのですが、これは部材数が1本不足していることになります。蓋をして箱を閉じると丈夫な箱に変身します。なお、立体的に対角線相当の部材を使う方法もありますが、箱の内部を邪魔する部材になりますので、普通は使いません。

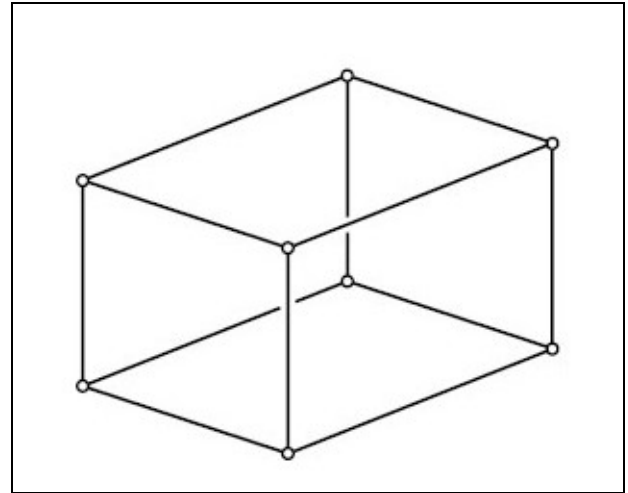


図 2.9

- (7) 右の図 2.10 に示す立体骨組み構造の安定・不安定を吟味せよ。また、静定にするには、どのように部材を追加すればよいかの提案を示せ。

解説：

部材数は12です。支点は6ヶ所あって、すべて3成分の反力を受けますとしますので、支点に18部材数に加え、 $M=30$ です。格点数は $N=12$ です。必要部材数は $3N=36$ ですので、部材数が6本不足しています。どのように追加部材を使えばよいかを考えてみて下さい。

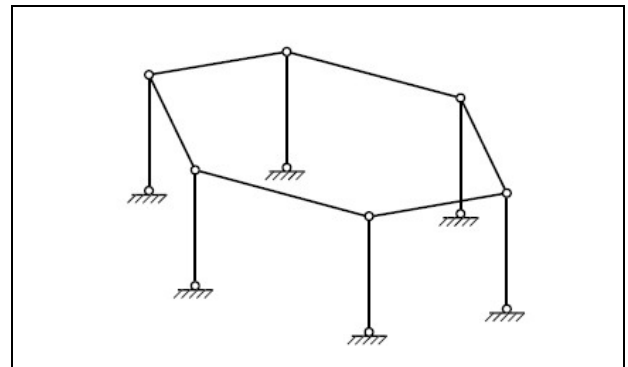


図 2.10

2.2 簡単な不静定トラス

2.2.1 解析の原理

不静定トラスを解くときの方法は、まず、全体の部材数と接点数とから、不静定の次数を求めます。それから、不静定次数だけの本数の部材を選んで、これを仮に取り外した状態を考えます。これを、**静定基本系**とすることにします。取り外す部材を**不静定部材**と言ひ、そこに作用していた内力を**不静定力**とし、分解した静定基本系と不静定部材に外力として作用させます。部材を切断すると、内力は符号反対の外力の対で考えることに注意します。ここでは、図 2.11 に示すような、45° 傾けた正方形枠と十字型に組んだ部材で構成した、1 次の不静定トラス (a) を例題にして説明します。この構造は、水平部材 (c) を取り外すと、静定基本系 (b) になって、釣り合い条件だけで部材力を解くことができますし、変形も計算できます。元の不静定トラスは、静定基本系と不静定部材との組み合わせ構造と見て、それぞれは、バネの作用でモデル化ができます。元の不静定トラスは、前章 1.2.2 節で紹介した並列バネ系でモデル化ができます。静定基本系をバネ作用にモデル化するときは、前節で解説したように、静定トラスを解く必要があります。元の不静定トラスに作用させる外力は、左右を引張る状態を図示しましたが、上下の外力の対が作用する場合に簡単に応用できます。さらには、その二つの荷重条件を重ね、上下に圧縮、左右に引張りの外力を作用させる場合の解を求めることができます。次数の大きい不静定構造物の解析は、橋梁構造などの専門ごとに固有の問題があります。ここでは、不静定トラスの原理が分かるような、図 2.11 に示すような単純な一次の不静定トラスを例として説明します。このような外力の作用は、次の第 4 章で、剪断変形を計算するときを考えますので、ここでは、その予備知識になるような例題を取り上げました。この静定トラスの変形は、前節の図 2.7 を使った問題 (2) を参考にして下さい。

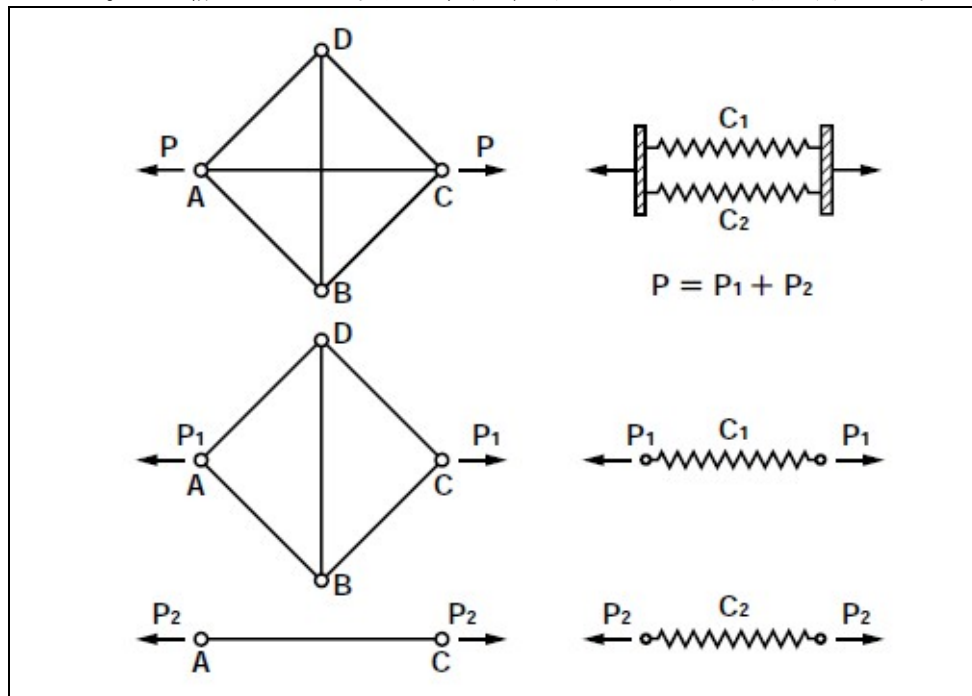


図 2.11

例解：

正方形の一辺の長さを L 、この部材の断面積を A_A 、対角線部材の断面積を A_B 、両部材のヤング率を同じ E とします。図 b の静定トラスを左右に P_1 で引っ張ると、垂直部材は同じ大きさの P_1 の圧縮力が作用します。二頂点 AC 間の変位 δ_1 は、図 2.7 の解法を参考にして求めます。水平な不静定部材を単独に引っ張るときの伸び δ_2 の計算式も並べて示します。

$$\delta_1 = \left(\frac{2}{A_1} + \frac{\sqrt{2}}{A_2} \right) \frac{P_1 L}{E} \quad \delta_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{A_2} \right) \frac{P_2 L}{E}$$

元の不静定トラスとしての変位は下の式で得られます。

$$\delta = \frac{A_1 + \sqrt{2}A_2}{\sqrt{2}A_1 + A_2} \left(\frac{PL}{EA_2} \right)$$

演習例題 2.2

- (1) 図 2.12 の部材構成は一次の不静定トラスである。部 AD, CD は鋼棒で、断面積 $A_s=10\text{cm}^2$ である。部材 BD の材質は銅であって、断面積は $A_c=20\text{cm}^2$ である。格点 D に $P=5\text{tf}$ が作用するとして部材応力度と撓みを計算せよ。ただし、ヤング率は、鋼材と銅材とでは、 $E_s=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $E_c=1.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ とする。

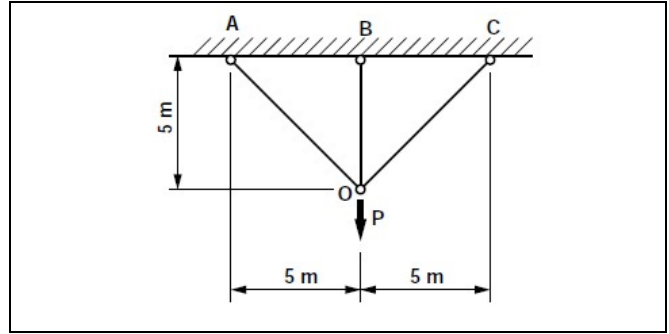


図 2.12

解説：

不静定構造物を解くときは、どの部材を不静定部材とするかを考えること一つの興味の焦点です。解き易い静定構造系になるようにします。この例題は、左右対称形ですので、中央の部材を O 点で切断して、部材 OB の部材力を不静定力とするのがよいでしょう。OA, OC で構成する構造は、図 2.5 と同じです。ここでの例題は、一次の不静定トラスを扱うようにしましたが、これは、前の第 1 章 1.4 節で解説した組み合わせ部材の不静定問題と同じです。材料違いの構造を扱うときは、主材料に対して、別の材料の断面積をヤング率の比で換算して計算に使うのが実践的です。この考え方は、前章 1.2.3 項で説明しました。なお、荷重の作用点で、その荷重方向の変位を計算するときは、エネルギー法を使うのが簡明です。この計算例は前節の問題(4)に参考として示してあります。計算原理は、外力のした仕事と、部材内部に蓄積された歪みエネルギーとが等しいと置くことです。なお、エネルギーと仕事との関係式は $U = P \delta / 2$ の形を持ちます。しかし、実践的な表計算では、係数 2 を省くことが多いので例題計算を見るときに注意します。解と、解までの計算手順の説明を省きましたので、この解説をヒントとして解いて下さい。

- (2) 等断面 $A_s=15\text{cm}^2$ の鋼棒により図 2.13 のトラスで、 $P=10\text{tf}$ の横力を受けるときの、各部材の応力を求めよ。また C 点の変位（垂直と水平）を求めよ。ただし、ヤング率を $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ とする。

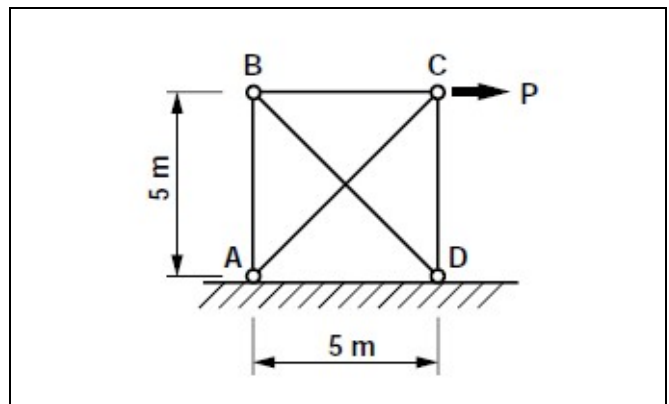


図 2.13

解説

この例題は、図 2.6 の二つの片持ちトラスを 90 度回転して一つにまとめ、部材 BC を追加した構造になった一次の不静定トラスです。部材数と支点での拘束条件をいれて、不静定次数の確認をして下さい。部材数が一本余分ですので、どれを不静定部材にするか、の選択が悩ましいところです。いずれにしても、外力の作用によって、残った静定トラスを解いて、不静定部材の両端での長さの変化分を計算しなければなりません。不静定部材に作用する力の向きを、外力 P の向きと合わせると、解き易くなります。したがって、この問題では部材 BC を不静定部材とするのが適当です。この部材を格点 B または C のどちらかで切り離し、片持ちトラスの一方に接続させておきます。接続の考え方は、前の 1.2.2 項で解説した直列部材です。不静定力の計算は、並列部材を解くことになります。解を示しませんが、各自で挑戦して下さい。

3. 二次元弾性体の応力と変形

3.1 摩擦と剪断

3.1.1 二次元弾性体とは

材料は、マクロに見て、等方性で均質な三次元的な連続体をしていると仮定します。前章で解説したトラスの弦材は、幅も厚みも捨象して、材料を直線でモデル化しています。これを扱う材料力学は幾何学的には1次元の座標系を使います。平面トラスの解析は、一平面内で二方向の力の釣り合いと変形を扱い、幾何学的には二次元の座標系を使う構造力学です。平面内だけで力と変形を扱う連続体の解析では、一定の厚みを持った弾性板を考えます。これを二次元弾性体として解析します。例えば、矩形断面の梁の曲げを扱うとき、薄板を縦位置にして、幅（厚み）方向に重ねたモデルを考えます。幅方向の応力と変形は扱わないのですが、これを考えるモデルが二種あります。第一は、幅方向の応力度を0にすること、第二は、幅方向の歪みを0にすることです。通常は、第一のモデルを考えます。このとき、板の面内が圧縮応力の場合では、**ポアソン比**(S. D. Poisson, 1781-1840)に相当する膨張歪みが、また引張り応力の場合では収縮歪みが、高さと同方向に出ます。軟らかな矩形断面の消しゴムを曲げると、この歪みを体験できます。しかし、矩形梁の幅を広げて、板全幅を円筒状に曲げると、幅方向には横方向の歪みが拘束されますので、第二のモデルを考えます。理論的に扱うときは、ヤング率が幾らか大きくなる条件を代入することで、第一と第二の二次元弾性体は同じ数式で扱うことができます。

3.1.2 垂直応力と剪断応力

部材の引張（または圧縮）を二次元弾性体として扱うときは、例えば、幅の広い矩形板の両端で引っ張り外力が作用している状態を考えます（図 3.1）。この板を仮に斜めの面で切断したとして、この面に作用している内力を、二方向の外力成分に分けます。面に垂直な成分を**垂直応力**、面と並行な成分を**剪断応力**(shearing)と呼びます。この応力を切断面の断面積で割った応力の大きさの度合いを、**垂直応力度**(normal stress)と**剪断応力度**(shearing stress)と言い、記号の約束として σ と τ を当てます。垂直応力度の符号の約束は、力学的には引張力を正とします。剪断応力の符号の付け方は、この面にどのような局部座標系を考えるかの約束と関係しますので、一意に決定できません。このことが、剪断力と剪断応力度を理解するときに混乱する原因の一つです。

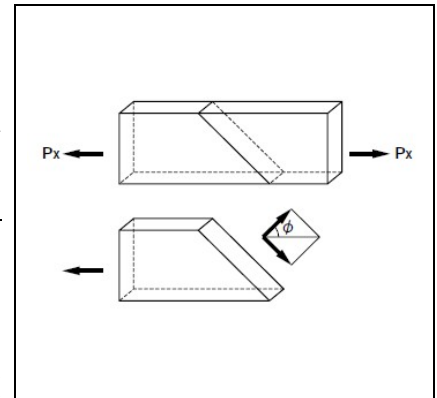


図 3.1 二次元弾性体の引張り

3.1.3 剪断力と摩擦力との異同

剪断力は、物理学での**摩擦力**(friction)と同質の力です。摩擦を考えるときは、滑りを起こす具体的な面があります。平面だけでなく円柱面や球面のような曲面もあります。器械部品の回転ベアリングがそうです。普通の説明には、平らな斜面上に物を置いて、滑り落ちないときの静的な力の釣り合いを考えますが、物と斜面との接する面の大きさを考えません。したがって、接触面の単位面積当たりの力も考えません。剪断力の場合には、弾性体内部に「或る向きで仮定の滑り面」を仮定して、摩擦面に働く力と同じ扱いをします。ただし、面で接するのは同じ材料であって、それも連続した接触です。力としては、接触している面に沿って、単位面積当たりの応力度の方で扱い、或る範囲の剪断応力度の合力を考えると剪断力です。二種の材料が接している境界面での力を扱うとき、剪断力に代えて、しばしば摩擦力とも言います。物理学で摩擦力を扱うときは、接触面に圧縮力を作用させる必要があります。応用力学の用語では**支圧応力**(bearing)と言います。剪断面を考えると、その面に垂直に働く内力は、圧縮力だけでなく、引張力の場合もあります。引張力は、その面で材料が剥（は）がれないように接続を保持する内力ですので、**付着応力**(bond)と言うことがあります。接着材（固まる前は剤と使います）を使って物を貼り合わせるとき、接着強度は、接触面の剪断強度の方を言います。しかし、接着材本体に引張強度がないと、簡単に剥がれます。そのため、接着材本体の材料力学的な性質は、純剪断強度と単純な引張強度の大きさが、ほぼ等しくなります。コンクリート材料は、セメントペーストが骨材（砂利や砂）に対して接着材となって構成される材料です。コンクリート材料は、剪断強度と引張強度がほぼ同じ大きさになりますので、このことを考えて構造設計に応用します。

演習例題 3.1

- (1) **鋼リベット材**の許容剪断応力度を、 $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$ として、直径 22mm のリベットの強度 (**単剪強**、**複剪強**)を求めよ。
(解：3041 kg, 6082kg)

解説：リベット径は、材料に使う鋼棒直径の寸法が 7/8 インチであるのをミリメートルに換算した**呼び寸法**で言います。実務用の計算は mm の寸法を使います。なお、板に空ける穴の寸法は直径 25mm としますが、これは 1 インチ長さを mm で換算した呼び寸法です。リベットの剪断面に作用する剪断応力度は、断面に等分布すると仮定します。リベットは、複剪で使う方が効率的です。なお、リベットは、**ボルト**のような、軸方向への引張力を受けると使い方を避けます。なお、板の方に注目すると、穴の側面にリベット径からの支圧力を受けます。

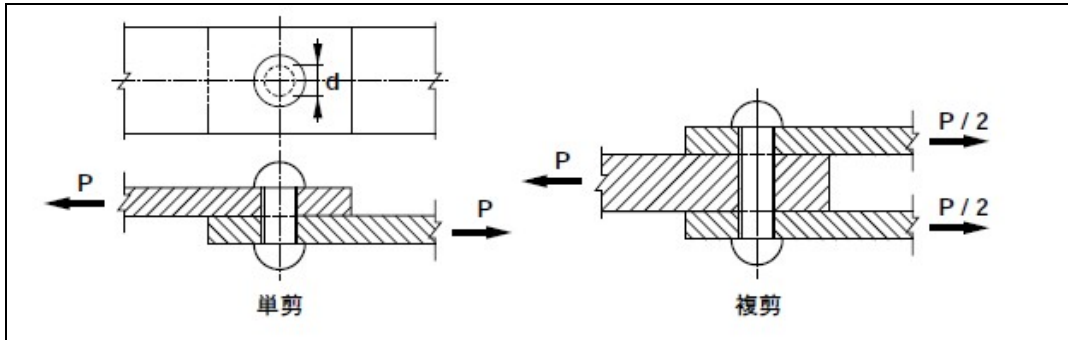


図 3.2 リベット継ぎ手

- (2) 板厚 10 mm、幅 250 mm の鋼板の許容引張応力度が 1400 kg/cm^2 であるとする。この板を**脚長** 8mm の**隅肉溶接** (fillet welding) の**全強**で繋ぎたい。溶接長を求めよ。ただし溶接部の剪断許容応力度を 800 kg/cm^2 とする (図 3.3a)。
(解：77cm)

解説：溶接部は、剪断応力度で力を伝えるように構成します。実際の溶接は、板の側面だけでなく、断面側にも溶接します。これを**前面隅肉**と言います。作用する剪断応力度の向きが直交しますし、応力度が最大になる面が図 3.3c の 45° ではないのですが、便宜上、隅肉溶接と同じ計算を使います。なお、実際の溶接長は、計算上の長さ、幾らかの**予長**を加えます。

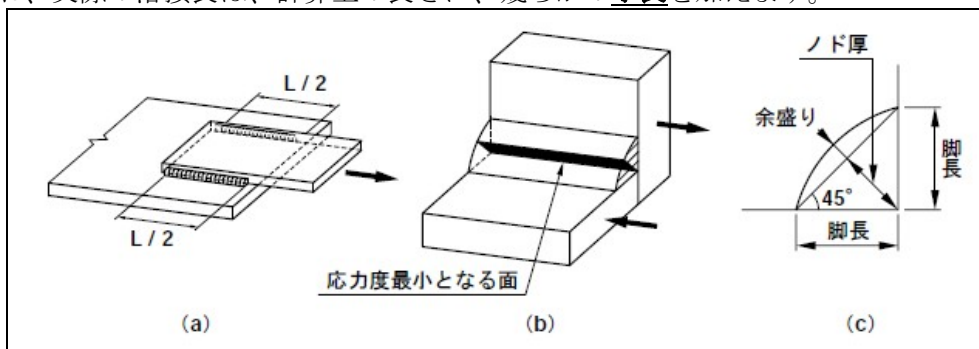


図 3.3 隅肉溶接継手

- (3) 幅 25cm の木製角材を $P=5 \text{ tf}$ の引張力で使うとして、図 3.4 の形で継ぎたい。引っ掛かり部の寸法を決めよ。木材の繊維方向に平行な面での許容剪断応力度を 8 kg/cm^2 、受圧面の許容支圧応力度を 60 kg/cm^2 とする。
(解： $d=3.3 \text{ cm}$ 、 $l=50 \text{ cm}$)

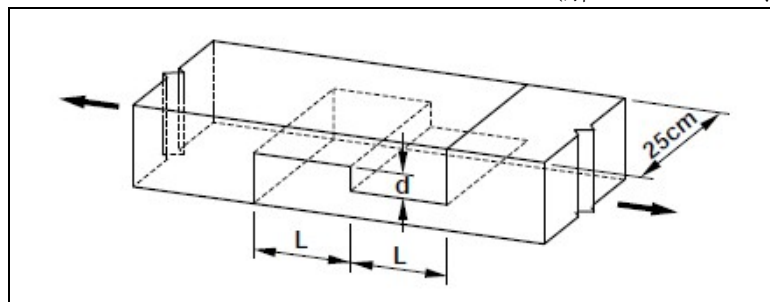


図 3.4 木材の引張継手の一例

3.2 主応力と主ひずみ

3.2.1 座標系を考えて応力度の向きと符号を決める

二次元の弾性的な板を扱う力学モデルを数学的に扱うときは、弾性体に平面座標系(x, y)を決めておきます。板の厚み方向はz軸ですが、この方向は単位幅とします。或る位置の応力を考えるため、微分的に考えた単位正方形を切り出し、そこでの、力の釣り合いと変形との関係を探ります。切り出した弾性体に作用させる外力は対で働くのですが、単位寸法の面に作用する力を座標軸方向で個別に P_x , P_y とします。 P_x は、x軸に直交して切断して右側を取り去ったとして、残った方の材料の、右側の面に作用する外力の方で注目します(図3.5参照)。説明が少しくどいのですが、この約束を理解しておきます。この力をさらに座標軸方向の成分に分解し、垂直応力と剪断応力とに分けます。これを P_{xx} , P_{yx} と書くことに代えて、単位断面積当たりの応力度の記号 σ_x , τ を当てます。同じようにy軸に直交する上側の面について、垂直応力度と剪断応力度の記号を σ_y , τ と決めます。 τ には座標系の記号として τ_{xy} と τ_{yx} と区別して書くべきですが、この二つは釣り合い条件から同じ大きさですので、座標記号なしに τ と書く習慣です。因みに、三次元の弾性体を扱うときは、座標系の記号を二つ添えて剪断応力度の作用面と力の向きを区別しなければなりません。

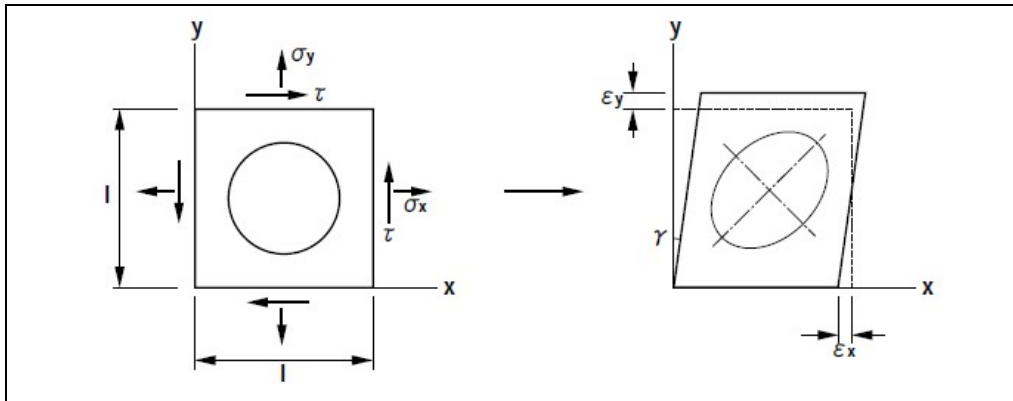


図 3.5 応力度と歪みの、記号と向きの約束

3.2.2 座標軸を回転させたときの応力度の表し方

前節の図3.1は、仮定の滑り面を考えると、垂直応力と剪断応力の計算原理を示しました。座標軸xは、この図では右向きです。右端のx軸に垂直な面を左回りに角度 ϕ で回転させた面について、垂直応力度 σ_n と剪断応力度 τ の計算式は、釣り合い条件から下のよう表すことができます；

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \phi, \quad \tau = -\sigma_x \sin \phi \cos \phi$$

ここでの剪断応力度 τ の式には、マイナス(-)符号がつきます。これは、上の項で説明したように座標軸yの正の向きを上向きとしていますので、図3.1で見ると、 τ が右下向きになっていることを表しています。二次元弾性体として上下方向に σ_y が作用する場合と合わせて、垂直応力度と剪断応力度を求めると、右上を向いている仮定の斜面の応力度は、下の式です。

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi \\ \tau = (\sigma_y - \sigma_x) \cos \phi \sin \phi \end{cases} \quad \dots(3.1)$$

この式を変形して、下のよう書き直します。

$$\begin{cases} \sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\phi \\ \tau = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\phi \end{cases} \quad \dots(3.2)$$

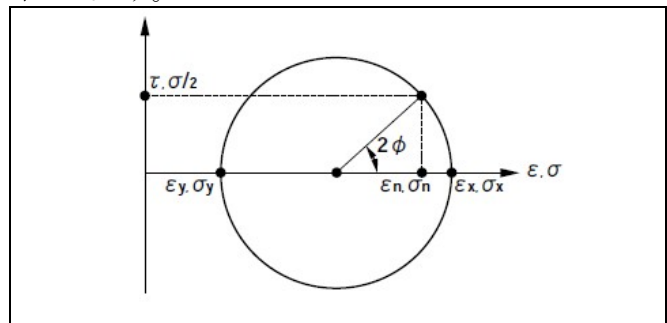


図 3.6 モーリングによる応力(歪み)の表し方

式(3.2)の σ と τ の意味を幾何学的に理解するための図を**モーリング**(C. O. Mohr, 1835-1918)と言います。垂直水平二方向の主応力を受けている状態から、或る面の主応力度と剪断応力度を理解するための図式方法です。角度を 2ϕ で使うことに注意します。この図を逆に応用して、或る二次元の応力状態(σ_x , σ_y , τ)から、主応力の大きさと主軸の向きを求めることができます。この説明は3.2.7項です。

3.2.3 最初に垂直応力度だけによる変形を理解する

二次元弾性体の歪みは、便宜的に垂直応力度による変形と剪断変形とに分けて扱います。剪断変形は、図 3.5 右に示したように、平行四辺形に変形することです。直交していた四辺形の角度が γ だけ変わるとします。この変形を幾何学的に表すためのモデルとして、最初の正方形平面に円を描いておいて、その円が楕円に変形することを想定し、これを数学的に表す方法を求めます。幾何学的に見るとき、円は、長径と短径持つ楕円に変形し、楕円の対称軸は、或る傾斜を持つように変形します。この対称軸方向が**主歪み**の向きです。剪断応力度が作用しない場合、垂直応力度だけが作用する状態です。これを主応力と言います。円は楕円に変形するのですが、この場合、楕円の対称軸は回転しません(図 3.7)。全体が円のまま拡大・縮小するときは、主歪みの向きの傾きを考えるまでもないので、便宜的に元の座標軸方向のまま済ませます。

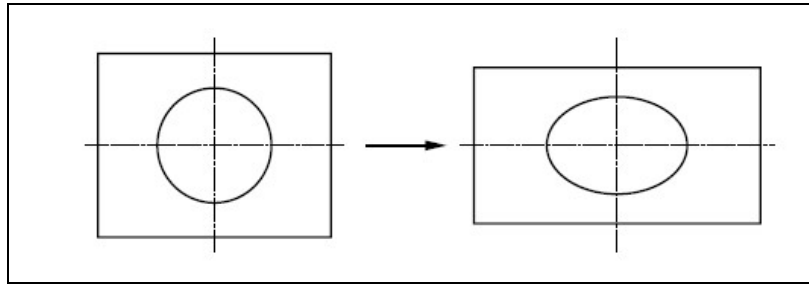


図 3.7 垂直応力だけが作用するときの変形

剪断応力が作用しない状態の主応力と歪みの関係は、 E をヤング率、 ν をポアソン比として

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \end{cases} \quad \dots(3.3a), \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \end{cases} \quad \dots(3.3b)$$

上の式(3.3)は平面弾性体の力学を扱う場合ですので、板の厚み方向の応力 σ_z を考えません。しかしこの方向にも実はポアソン比分の歪みが出ます。弾性体は、圧縮すれば体積が減ります。側面の応力度が0の状態では柱を圧縮すれば、体積の変化率は $(1-2\nu)$ 倍に比例します。したがって、物理的に考えて、圧縮して膨張することはありませんので、 ν の値が0.5よりも大きくはなりません。ゴムは0.5に近い性質を示します。鋼材では約0.3、コンクリートは約0.2、堅い岩石では約0.1です。

3.2.4 剪断剛性率は幾何学的に計算できる

剪断剛性率 G は、図 3.8 (下) に示したように、正方形が純剪断応力度を受けて平行四辺形に変形するときの角度変化 γ を計算する下の式で定義します。歪み ε は、単位長さ辺の、その方向の伸びを表すのですが、 γ は、辺に直角方向の歪みを表している意義があります。

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \dots(3.4)$$

この変形状態は、図 3.8 (上) の正方形を上下と左右とに同じ大きさの圧縮と引張応力度を作用させたときの、 45° 向きの正方形が菱形に変形することと同じです。したがって、角度変化 γ は、前の第2章で解説したトラスの三角形の変形を求めたように幾何学的に計算することができます。前章の図 2.4 で、底辺の長さ変化で頂角が γ の角度変化をするとして、下の式を導くことができます。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots(3.5)$$

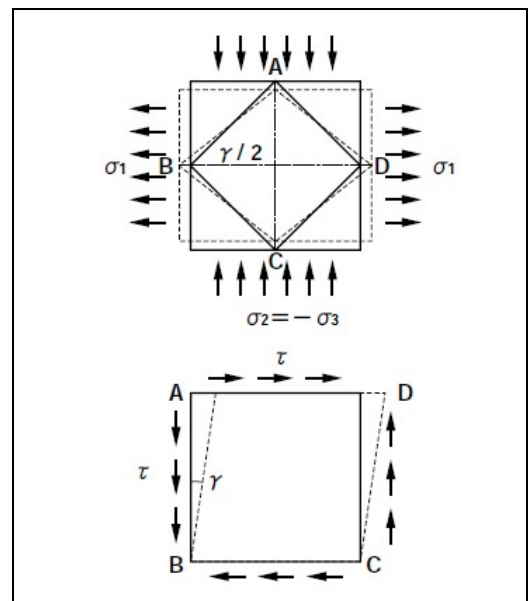


図 3.8

3.2.5 主歪みだけの变形から剪断歪みを求める

前項の図 3.8 の変形は、圧縮歪みと引張歪みの大きさが同じとした条件で、内側に描いた 45° 傾けた正方形の変形を幾何学的条件から剪断歪みを求めました。同じ図を考えておいて、或る角度 ϕ だけ傾けた正方形の右上の辺について、右上方向の伸び ϵ_n と辺の角度変化 γ を幾何学的に計算することができます (図 3.9)。この結果は、元の二方向の主歪みの大きさを ϵ_x と ϵ_y として、式 (3.1) において、 $\sigma_x \rightarrow \epsilon_x$ 、 $\sigma_y \rightarrow \epsilon_y$ 、 $\tau \rightarrow (\gamma/2)$ と書き換えた形で得られます。

$$\begin{cases} \epsilon_n = \epsilon_x \cos^2 \phi + \epsilon_y \sin^2 \phi \\ \frac{\gamma}{2} = (\epsilon_y - \epsilon_x) \cos \phi \sin \phi \end{cases} \quad \dots(3.6)$$

なお、角度 ϕ は、左回りを正の向きとする約束です。さらに言えば、歪みに関してもモール円を応用することができます。このことを含みにして、図 3.6 の座標軸の記号を、応力と歪みとを併記しました。ここで注意することは、 $\tau \rightarrow (\gamma/2)$ と対応していることです。

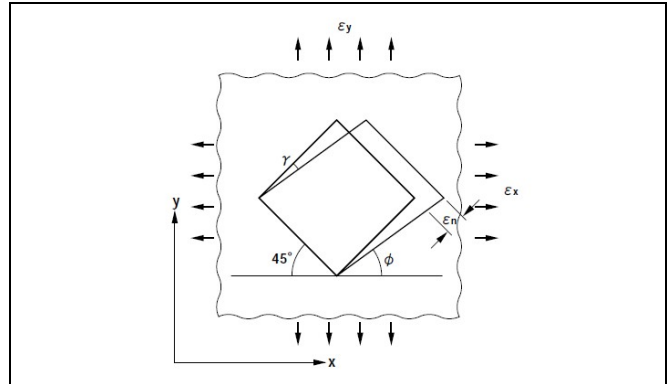


図 3.9

3.2.6 材料の変形は長さ変化で計測する

弾性体の力学を設計に応用するとき、普通、材料の或る断面の垂直応力度を計算します。剪断応力度を判断に使う割合は、相対的に少なくなります。一方、変形を扱うときは、注目点を決めて、或る向きの変位を計算します。角度変化の計算を必要とする場合も、勾配のような、長さ直して理解する方が分かり易くなります。図 3.5 右の γ は、単位高さに対する勾配相当の横変位です。実際の構造物、または研究目的に模型を使って、理論的な予測値と比べたいとき、応力度を直接測ることができませんので、長さの変化、または歪みを測定して、これから間接的に応力度を計算します。この作業用語としては、**応力測定**と言います。角度変化の方を主目的とした計測は、ジャイロコンパスなどのような特殊な装置を必要としますので、手軽に実用できません。二次元弾性体の或る個所の応力状態を知ることは、座標系を約束しておいて、三個の未知数 (σ_x 、 σ_y 、 τ) を求めることですが、それを三個の歪み (ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ) から計算します。具体的には、図 3.5 または図 3.7 で説明したように、円が楕円に変形することを測定するのですが、図形としての円に代えて、三角形の変形を測定します。三角形の三点の位置を決めておいて、その頂点間の長さ変化を測ります。実用的には、機械的なコンタクト式ゲージか (図 3.10)、**電気抵抗線歪みゲージ** (wire resistance strain gauge) を使って電気電子的に計測します。コンタクトゲージは、あらかじめ測定個所に鋼の小球を埋め込んでおき、その間の長さ変化を、組み込みのダイヤルゲージで測ります。精度のよい計測をしたいとなると、辺の長さ (**ゲージ長**: gauge length と言います) を大きくしたくなるので、これが別の問題を起こします。電気抵抗線歪み計は、金属材料に使う場合、ゲージ長を 10mm 程度と小さく抑えることができ、歪みに比例する抵抗変化を電気電子的に計測できます。この歪みゲージ 3 成分をまとめた製品をロゼットゲージ (rosette) と言います (図 3.11)。図形としての三角形の変形を考える代わりに、三辺の向き方向の歪みをベクトル的に扱います。



図 3.10 コンタクトゲージ

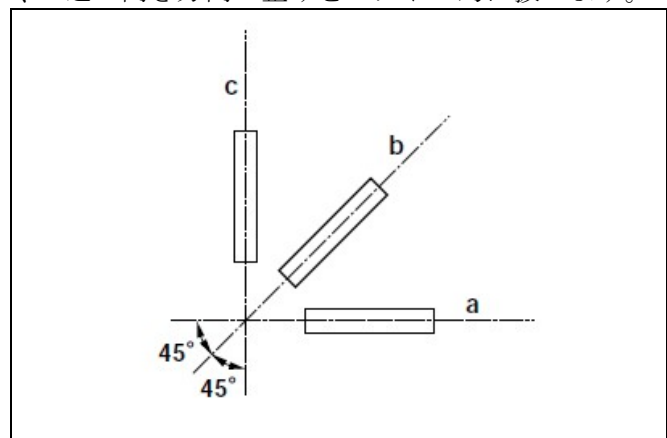


図 3.11 ロゼットゲージのゲージ配置

3.2.7 モール円を応用して主歪みの向きと大きさを求める

ロゼットゲージを使って3方向の歪みを測定したとして、測定個所の主歪みの大きさと向きを求めるときは、測定個所の座標系の約束、ロゼットゲージの向きの約束、などの幾何学的な条件を決めておかないと、結果を間違えて判断することがあります。したがって、後で説明する代数式を使う場合でも、あらかじめ、歪みの性質をモール円で表した場合の対応を理解しておく必要があります。まず、ロゼットゲージの番号、図 3.11 では a, b, c の順番を、a を起点として 45° ずつ左周りとしします。ゲージ a の向きを、測定個所の x 軸に合わせ、ゲージ c を y 軸に合わせるとしします。この状態で歪みを測定し、歪みが ε_a 、 ε_b 、 ε_c と得られたとします。ここで、この歪みの、モール円の円周上の位置が、図 3.12 のようになっていたとして、主歪みの大きさと角度 ϕ との関係を吟味しましょう。

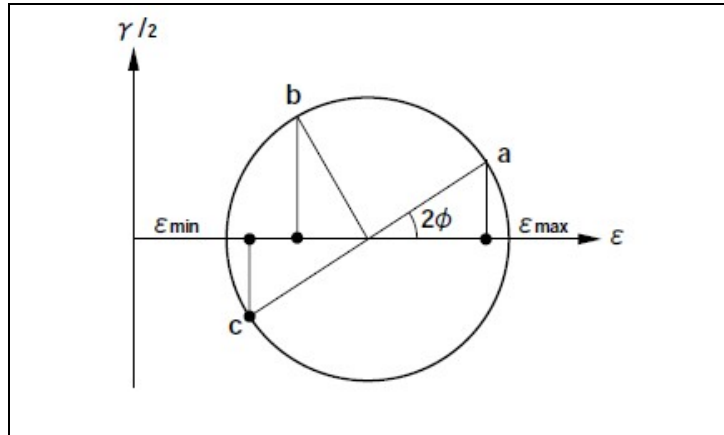


図 3.12 ロゼットゲージの歪みをモール円の ε 座標で示す

- ・ モール円の直径 $2r$ は、図 3.9 に示す最大最小の主歪みの差 ($\varepsilon_{MAX} - \varepsilon_{MIN}$)/2 です。
- ・ モール円の中心は、 ε 軸上にあり、その位置は $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{MAX} + \varepsilon_{MIN})/2$ です。
- ・ モール円の円周上に、90° ずつ左周りに三点があり、その ε 座標値が ε_a 、 ε_b 、 ε_c です。
- ・ モール円の中心位置は $\varepsilon_0 = (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$ です。
- ・ 主歪みの向きは、測定対象の (x, y) 座標系から、±45° 以内に角度 ϕ で振れるとします。
- ・ ϕ の正負の符号は、歪みの大小関係から下の表のように決めます。

条件 1	$\varepsilon_a > \varepsilon_c$	$\varepsilon_a > \varepsilon_c$	$\varepsilon_a < \varepsilon_c$	$\varepsilon_a < \varepsilon_c$
条件 2	$\varepsilon_0 > \varepsilon_b$	$\varepsilon_0 < \varepsilon_b$	$\varepsilon_0 > \varepsilon_b$	$\varepsilon_0 < \varepsilon_b$
ϕ の符号	+	-	-	+

- ・ モール円の半径 r は、次の式です。図 3.12 を見て理解して下さい。

$$r = \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_0)^2} \quad \dots(3.7)$$

- ・ 角度 ϕ は

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_b}{\varepsilon_a - \varepsilon_0} \right) \quad \dots(3.8)$$

- ・ 式(3.8)は、このままで、上で解説した ϕ の符号の約束を満たします。なお、逆正接の数値計算では分母が 0 に近いときに処理に困ることがあります。EXCEL など、コンピュータの組み込み関数には、ATAN(Y/X) と引数一つ使う関数と、引数を二つ使う ATAN2(X, Y) も使えることを覚えておくといでしょう。
- ・ 主歪みの向きは、ゲージ a の向き（ここでは x 軸）から、角度 ($-\phi$) で回転させた方向です。
- ・ 主歪みの大きさを、数学的に $\varepsilon_{MAX} > \varepsilon_{MIN}$ と約束すると、圧縮応力度を主に扱う場合に混乱することがあります。主歪みは、大小順ではなく、歪みの測定値 ε_a と ε_c の大小順で判断します。
- ・ 主歪みが求めれば、式(3.3b)を使って、主応力の大きさが計算できます。最大剪断応力度は、式(3.2)から分かるように、二つの主応力度差の 1/2 です。
- ・ モール円の解析は、応力測定の際に扱うことが多いのですが、この目的は局所的な応力の大きさと向きとを知って、部分的な材料の補強方法の提案などに応用します。例えば、コンクリートの場合には、引張り応力に抵抗する向きに鉄筋を入れる；鋼板の補強では圧縮方向の座屈防止に補強する、などが考えられています。

演習例題 3.2

(1) 鋼板の材料試験をするとき、図 3.13 に示すような形状の引張試験片を使う。引張応力度が $\sigma = 1800 \text{ kgf/cm}^2$ の状態であるとき、断面の法線方向から 30° 、および 60° の角度をなす断面での、垂直応力度と剪断応力度を求めよ。

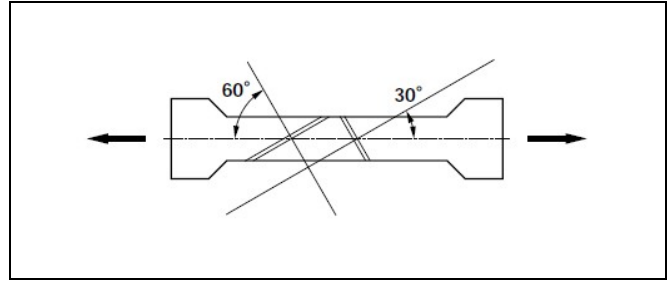


図 3.13 鋼材の引張り試験片

(解: 30° の場合 $\sigma_n = 1350$ 、 $\tau = 779$ 。 60° の場合、 $\sigma_n = 450$ 、 $\tau = 779$ 。単位は kgf/cm^2 である。)

解説: この問題は、式(3.1)を利用して計算できますが、同時に、モール円(図 3.6)を描いて、図式で数値の確認をすることを奨めます。材料試験機の秤量表示は、重量トン表示からキロニュートン表示に変わっていますので、重力加速度 9.8 で除した値を使うようになりました。したがって、 1800 kgf/cm^2 は、約 180 kN です。材料試験を観察していると、材料が降伏点を超えると、長さ方向に塑性歪みが起きます。引張強度よりも剪断強度が小さいので、直ぐには破断しないで、ミクロのレベルでは約 45° 方向の剪断滑りが何重にも重なって全体断面が減少していきませんが、直ぐには破断しません。これは、材料の結晶レベルで転位(dislocation)が起きているためです。引張り強度に持たなくなる荷重になると、長手方向に直角の断面で破断します。破断するときの断面積は、元の断面積よりも小さくなっていますが、実用的な引張強度相当の応力度は、元の断面積当たりで表します。鋼材に塑性加工を加えて圧延すると、相対的に断面が減少した材料になり、結果的にこの材料の引張強度が上がります。なお、コンクリートの圧縮試験は、力の符号が逆になります。この材料は、剪断強度が圧縮強度よりも小さいので、 45° 方向の面で滑り破壊が起きます。

(2) 図 3.11 に示したような配置のロゼットゲージを使って応力測定をして、三方向の歪みが左回りに 45° の順で、 $\epsilon_a = 350 \times 10^{-6}$ 、 $\epsilon_b = -333 \times 10^{-6}$ 、 $\epsilon_c = -150 \times 10^{-6}$ 、と得られた。主歪みの大きさ、向き、を求めよ。これから、主応力の大きさを求めよ。ただしヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする。

例解: 第 3.2.7 項で解説した手順で計算する。歪みのモール円は図 3.14 に示します
歪みのモール円の中心座標:

$$\epsilon_0 = (350 \times 10^{-6} - 150 \times 10^{-6}) / 2 = 100 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_a - \epsilon_0 = 350 \times 10^{-6} - 100 \times 10^{-6} = 250 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_0 - \epsilon_b = 100 \times 10^{-6} - (-333 \times 10^{-6}) = 433 \times 10^{-6}$$

歪みのモール円の半径 (式 3.7): $r = \sqrt{(250^2 + 433^2)} \times 10^{-6} = 500 \times 10^{-6}$

主歪みの偏角 (式 3.8) $\phi = 0.5 \times \tan^{-1} (433/250) = 30^\circ$

主歪みの大きさ
 $\epsilon_{MAX} = 100 \times 10^{-6} + 500 \times 10^{-6} = 600 \times 10^{-6}$ (x 軸)

$$\epsilon_{MIN} = 100 \times 10^{-6} - 500 \times 10^{-6} = -400 \times 10^{-6}$$
 (y 軸)

全体を右回りに 15° 回転した向き

主応力の大きさ (式 3.3b) $2.1 / (1 - 0.3^2) = 2.3$

$$\sigma_{MAX} = 2.3 \times (600 - 0.3 \times 400) = 480 \text{ kg/cm}^2$$
 (x 軸)

$$\sigma_{MIN} = 2.3 \times (-400 + 0.3 \times 600) = -220 \text{ kg/cm}^2$$
 (y 軸)

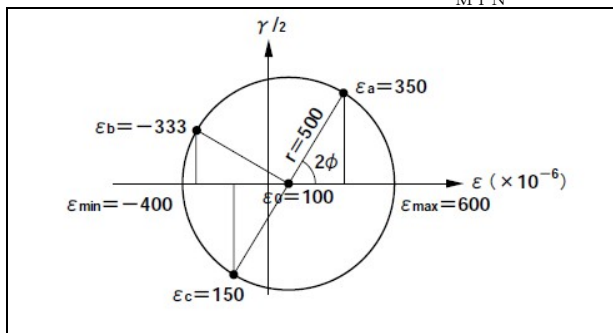


図 3.14 三方向歪みのモール円の解

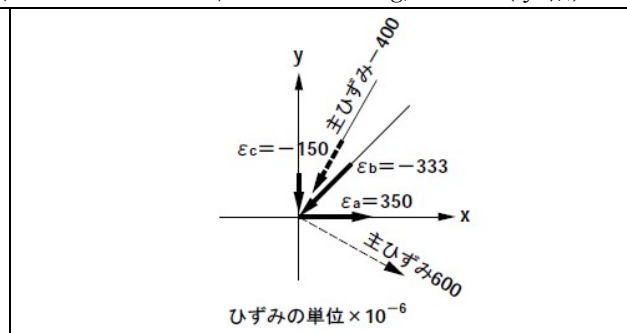


図 3.15 ロゼットゲージの歪みと主軸方向

4. 三次元的に扱う柱と梁

4.1 座標系の解釈と選択

4.1.1 座標系は恣意的に決めること

構造材料は、梁や柱のような細長い部材形状に加工して、力（内力）を一方から他方に伝えるように使います。最も基本的なモデルは、トラスの弦材のような、直線状の骨組み部材単位を組み合わせて空間を構成します。一定の断面形状で或る長さを持たせ、両端で別の部材と繋がります。この個所を格点とします。外力は、格点で作用させ、部材長さの途中では作用させないとします。しかし、梁は、横向きに外力を持たせて直線状または曲線状に連続させます。この場合は、微分的な長さで単位部材が繋がった、と考えます。この細長い部材の任意の位置が区別できるように、**局所座標系**を、問題に合わせて恣意的に（適当に）決めます。適当な間隔の座標点で解析するとき、番号を使うこともあります。例えば、トラス構造では、格点の位置の座標が必要ですが、格点番号で代表させることもします。トラスの弦材は、長さ方向の任意の場所で応力や変位を求める必要がありません。トラス部材の両端、格点番号の対を使えば、全体の中での相対的な部材位置が分かります。梁の場合、長手方向も含めた各部の位置は、大元となる三次元空間の座標系を使って位置を決めます。こちらを**世界座標系**と言います。局所座標系は、世界座標系のコピーを使うのが普通です。そして、局所座標系と世界座標系との関連を決めておきます。構造物が変形すると、局所座標系で与えられた位置が世界座標系の中で移動します。世界座標系を、例えば代数幾何学的に**右手系**の (x, y, z) と考えるときは、 (x, y) 座標の向きを水平面にし、 z 軸を上向きに決める、いわゆる**デカルト座標**を使います。しかし、橋梁工学では荷重の作用が主に下向きの力であることから、変形計算の理解に便利のように、一つの座標軸を下向きに正とする約束（左手系）を使います。平面構造力学では z 軸を考えませんので、 y 軸記号を下向きに正とする使い方もします。正負の向きの約束は、従来の専門の習慣がありますので、数学的な解析のときに混乱する原因の一つです。なるべく、図を併用して説明を補うように留意します。

4.1.2 局所座標系を決めて応力を区別する

細長い部材を考えると、例えば柱を立てた状態で、右手系の局所座標系 (x, y, z) を決めたとします（図 4.1）。部材は世界座標で位置を決めますが、差し当り、局所座標系と同じにしておきます。部材の局所座標系は、断面図形の代表点（通常は図形の重心）を通る空間直線（曲線も使います）を z 軸とし、部材位置を代表させます。材料力学的に扱う場合は、微分的に考えた単位長さの直線部材を切りだし、その上下の断面に内力の対を作用させます。一つの断面に作用する力は、ベクトル的に考えた力と共に、同じくベクトル的に扱うモーメントがあって、座標軸方向にそれぞれ3成分に分けます。これに名前を付けた呼び名で応力成分を区別します。力に関しては、 x 軸方向と y 軸方向の**剪断力**、 z 軸方向の**軸力**です。モーメントに関しては、断面図形の x 軸回り、 y 軸回りの**曲げモーメント**と、 z 軸回りの**捻じりモーメント**です。全体で6成分あります。この区別は、部材の座標系と関係つけた内力、つまり応力の名称です。一方、部材の変形は、切りだした単位部材の両端で、断面図形の相対的な位置の移動で考えます。これも、上の6個の応力成分に対応させるように、二方向の剪断変形、軸方向の伸び、断面図形の回転三成分です。これを図 4.1 に示すように、世界座標の原点に部材を拘束しておいて、上側の断面に作用する外力と、その断面の剛体としての移動とに置き換えて理解します。そうすると、外力と変形とに6個の弾性方程式が必要です。これを、マトリックスの形で表します。

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad \dots(4.1)$$

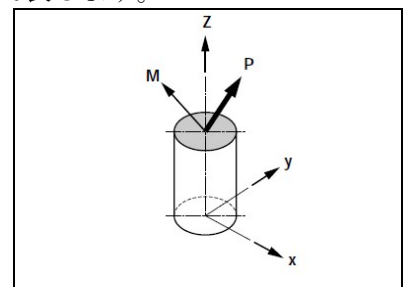


図 4.1

マトリックスの成分は、主に部材断面の形状から計算する各種の定数と関連を持ちます。この章では、柱と梁に使う場合を説明します。捻じれなどの特別な性質の解説は第7章で扱います。

4.1.3 マトリックスの成分を標準化する

式(4.1)は力と変位との関係を示す弾性条件式の一般形です。マトリックス部分を変位のマトリックス、FEMの用語では flexibility matrix と言います。力と変位の向きに注意し、対角線要素を必ず正に揃え、弾性エネルギーの計算に矛盾が生じないように、また、このマトリックスが対称になるように成分の符号に注意します。数学的には、このマトリックスの逆マトリックスが定義できますので、こちらを剛性マトリックス(stiffness matrix)と言います。変位のマトリックスは代数的な記号表現ですが、材料力学の課題として扱うときは、変数記号の、単位系と数値の表し方に注意が必要です。応力とそれに対応する変位との積は、仕事(または弾性エネルギー)の単位で揃えます。例えば、単位が kgf-cm, kg-m, tf-cm, tf-m の混用にならないようにします。力が作用しても、実質的には変形が小さい場合、または変形が出る個所であっても、力を考えなくても済む場合は、その力と変位に関する部分を省きます。トラス部材は、軸力一成分だけを考えます。平面構造力学として扱う梁は、三成分を扱います。これらは数学的な仮定です。材料力学では、実際構造が三次元的な部材であることを考えて数学的な解析を応用します。実際の構造部材に应用するとき、仮定で省いた力と変形を扱う必要があるかないかの吟味が必要です。

4.1.4 平面構造力学の梁での応力と向き

平面構造力学は、一平面内の力と変形だけに注目します。この条件だけの解析で、実用的にはかなり多様な応用ができます。その代表的な課題が、第2章で概説したトラスの解析と、これから説明する梁の解析です。梁は、直線部材を横位置で使い、荷重を上に乗せて下向きの変形を解析します。梁を考える座標系は、長さ方向を水平座標軸 x にし、外力としての荷重と撓み方向は下向きに測るのが約束です。曲げモーメント分布の説明図を描くときも、下向きを正としたグラフィックス座標を使うのが普通です(図4.2)。 y 軸を下向きに使うのは、数学座標系とは向きが逆ですので、左手系と言うことがあります。この約束は必ずしも特殊ではなく、コンピュータのモニタ画面の座標系などで使われていますが、しばしば正負の符号の取り違えを犯します。

二次元構造力学で扱う梁の応力は、軸力、剪断力、曲げモーメントの三成分です。切りだして考える梁部材の、右側の断面に作用する外力として、応力の向きの約束を図4.2のように決めます。原理の説明のため、式(4.1)を部分的に使います。

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad \dots(4.2)$$

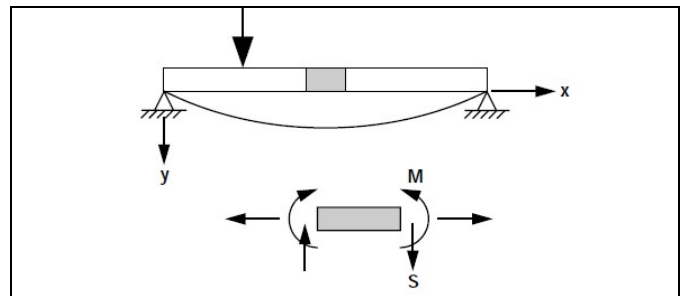


図 4.2 梁の変形応力の向き

応力の記号は、図4.2のように書き換えることにします。軸力 P と剪断力 S の正の向きは、座標軸 (x, y) の向きに合わせ、また、相対的な変位の向きも、そう決めます。曲げモーメント M は、梁を下向きに凸に曲げる向きを正とします。これは、ベクトルとして紙面の手前向きを回転軸とする左回りです。座標軸を三次元的には考えないのですが、右手系に仮定した z 軸を考えると、この向きは紙面を通して向こう向きです。曲げモーメント M の正の向きは、右手系の定義とは逆向きです。この違いは、梁の曲げモーメントを表す弾性式で、 $M = -EJ (d^2y/dx^2)$ の形で使うときに現れ、マイナス記号(-)が付きます。曲げモーメント図、剪断力図も、下向きを正とした図に描く約束です。

4.1.5 対角線要素を0にするように局所座標系を決める

二次元構造力学として梁の解析をするとき、梁断面に別の二次元の座標系を考えます。図形としての座標 (X, Y) を考えるのは局所座標系ですが、図4.2の座標系と向きは整合しません。このことは臨機応変に解釈しなければなりませんので、初学者が混乱する一つの原因です。局所座標系を決めるとき考え方は、式(4.2)のマトリックスで、対角線成分が0になるようにすることを踏まえ、基本として、軸力が作用したとき、梁の曲げ変形が起きないようにするために、図形の局所座標系の原点を図形の重心にします。式(4.1)の方では、横方向の梁の曲げも扱っています。梁の断面図形が左右非対称であると、二次元の平面から逸れる曲げ変形が起きます。梁を扱う場合には、差し当たり、梁に捻じれ変形のこと考えません。このようなことを含みにして、断面図形の局所座標系の向きを扱い、それによって断面の定数をどのように計算するかの実務的な知識に繋がります。

4.1.6 ラーメンの解析では右手系の方が便利

ピントラスの解析は、トラス弦材に曲げモーメントも捻じれモーメントも作用しないとする仮定です。釣り合い条件から、剪断力も作用しません。弦材の長手方向に x 座標だけを考えればよく、 y 座標を必要としません。式(4.1)または式(4.2)で、1行1列のマトリックスを扱うことに対応します。ラーメン構造は、トラスの格点で剛に部材を繋ぎますので、剪断力と曲げモーメントを考えるために y 座標も必要です。部材の向きが、斜めや垂直の場合もあり、また、図 4.2 を上下逆に使い、 x 座標の正の向きが左を向く約束も考えられます。したがって、部材ごとに局所座標系を決める場合には、部材の長手方向を決める x 座標の向きを約束を決めなければなりません。普通、その部材両端の格点番号の対を使えば、向きが決まります。例えば、格点番号の対で(3, 5)と(5, 3)と表すなどをしますが、向きの約束も定義しています。このようなラーメン構造の解析では、図 4.2 の定義とは逆向きの、右手系の局所座標系を使う方が便利です。ちなみに、有限要素法を利用する構造解析は、格点数と部材数の多い骨組みモデルを仮定します。このとき、部材の向きを考えて全体の幾何学的な構成を決めなければなりません。これは、相当に面倒な作業ですので、メッシュの自動分割が研究されています。この場合、部材単位の局所座標系に左手系の座標系を使うと、ベクトルの外積計算が必要になる個所で混乱が起きます。

4.1.7 中立軸は眼に見えない理論的な軸であること

図 4.2 に、梁を扱うときの力学モデルを示しましたが、その x 軸は、左側の支点ヒンジを原点として、桁の下縁に沿って引いてあります。実際の橋梁構造物で部材位置の寸法を決めるときの基準は、通路の基準高さ（標高）です。そこから下向きに、桁高さなどを測ってから、改めて全体の高さ方向の寸法を決めます。構造力学的に考えるとき、梁の軸線は、桁断面の重心を結ぶ線です。曲げによる応力度が 0 の位置ですので**中立軸**(neutral axis)とも言います。実際の桁断面は上下に非対称ですし、コンクリートとの合成作用などを考えると、理論的な中立軸がどの高さになっているかは分かりません。構造物の設計は、理論解析で考える力学的な骨組みを中立軸で構成しますが、実際の構造をそのようには作成できません。つまり、理論的な仮定と実際とは同じになりません。トラス橋の弦材の設計を例とすると、力学的な骨格の構造線を、腹部の鋼板高さの中央とします。弦材断面は、上下方向を非対称にしますので、図形としての重心位置が断面高さの中央とは一致しないことが起こります。そうすると、トラス弦材の軸力は、偏心して作用し、曲げモーメントも作用することになります。この違いを、設計計算で神経質に考えることもありますが、実践的には、細かな検討を省いて、設計時の許容応力度を決めるときに、それらの影響が含まれてあると解釈します。

4.1.8 寸法表示法は座標系の考え方とは違うこと

工業製品は、部品の製作・加工の情報に図面を作成し、寸法を記入します。これは数学的に見れば座標系を決めて座標値を記入することですが、数学的な考え方とは違う実務的な習慣があります。寸法は、実物に物差しを当てて測ることで確認します。これは一方向の座標系を、場所ごとに使うことですが、いわば原始的・古典的な一次元の幾何学座標系です。曲線に沿って長さを測ることもします。物差しの始点に当たる個所が、言わば原点です。基本的には寸法数値を正の整数で表し、負の寸法を使いません。小数表示も避けます。これらのことを考えると、部材断面の重心位置は、部材内部の位置ですので、物差しを当てて直接測ることができません。したがって、製図の寸法表示には使えない数値です。部材の組み立てでは、基本的な骨組み寸法の方を使いますが、組み立ての情報には、寸法を加算した積算表示を参考情報に使い、部分と全体との関連を示します。部材の製作単位は単品ごとですので、世界座標系の中での部材の位置と向きとを示す情報が必要です。これは、幾何学的には位相幾何学的な(topology)情報を扱っていることに当たります。これらの情報を理解するのは、人の方の空間認識能力です。そうであっても、入り組んだ立体的な構造を、図面だけで理解することに限度があります。模型を作ることでも検討することもあります。最近ではコンピュータグラフィックスを応用して、仮想世界で検討する方法(virtual reality)も応用されています。

4.2 断面図形の幾何学的定数

4.2.1 図形の性質を代数的に表す量

図形の性質を客観的に表現するときの情報は、幾何学的な性質を、数値またはそれを使う代数式で表すようにします。コンピュータで図形情報を表すときは、これらを属性（プロパティ：property）と言うようになりました。矩形や三角形と言うのは、図形を構成する部品としてのニックネームです。三角形と言うことで、その形を定義する情報として三頂点の座標値を含めることが必要であることが理解されます。しかし、言葉としては形容詞や副詞を使う感覚で理解させたい情報は、定量化ができないと扱うことができません。「美しい・綺麗」などは定量化できない情報です。色は言葉と言うと曖昧ですが、コンピュータグラフィックスでは数値で宣言して利用しています。図形の具体的な情報は、形容詞で言えば、「大きいか・小さいか」を定量化する寸法数値が基本です。それから派生的に計算される、やや抽象的な定数（パラメータ）が幾つかあります。図形の面積は、典型的な抽象的な数値の一つです。図形の形状がどのようなものであるかは捨象されるからです。同じ材料から構成される、一定断面形状の柱や梁は、作用する応力との関連を付けるため、次の幾何学的パラメータを求めます。関連する工学的なパラメータについても、この節で解説します。

- 1) 軸力 … 重心位置と断面積
- 2) 曲げモーメント … 中立軸と断面二次モーメント
- 3) 剪断力 … 断面一次モーメント

三次元的に考える部材は、捻じりモーメントによる変形に関連する数値が必要ですが、やや特殊ですので、第7章で別に扱います。上記の諸数値は、実務において頻繁に計算されます。カタログ化された材料では、上に挙げた幾何学的な性質の数値の他に、幾つかの定数が示されていますが、それらの意味を解説することが、この章の目的です。数値計算の式は単純な代数式ですが、数値計算を機械的に進めることと、計算間違いを見つけ易いようにまとめる書き方の、実務で使う習慣があります。例題解説と演習問題をこの節で扱います。まず、数値計算の原理を示すため、概念をまとめた代数式を紹介します。

4.2.2 断面積A

断面図形を表すために、図4.3のように、仮の(x, y)座標を決めます。ここでは右手系を考えてy軸を上向きにしましたが、梁の変形を計算することと関連させて、下向きを正とする説明もあります。材料のカタログには、向きの記号に(X, Y)と使っても、符号を使うことをしないで、寸法表示が見られます。重心位置の計算をする代数式は、後の項で説明します。面積を求める概念式は、

$$A = \int_A dA \quad \dots(4.3)$$

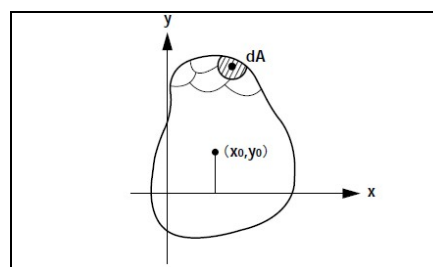


図 4.3

4.2.3 断面一次モーメント Q_x , Q_y

英語では static moment、日本語では能率とも言います。この計算は、高校までの物理では力の釣り合いを扱うときに出てくる概念です。英語の static は、その意味を持っています。能率と言う用語は一般的には効率の意味にも取られますので、専門用語はモーメントを使います。この場合にも曲げモーメントの用語があるように、真面目に考えると難しい概念で理解しなければなりません。一次は、数学的な表現式で、座標変数の一次式を使うことから使います。一次モーメントの計算は、断面図形全体で計算するだけではなく、或る部分の断面積についての計算が重要です。これは、剪断力の計算のときに使われます。計算の概念式は、

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_A x dA \\ Q_y &= \int_A y dA \end{aligned} \right\} \quad \dots(4.4)$$

断面一次モーメントの記号の使い方も恣意的なことが見られます。例えば、一次モーメント Q_x は、y 軸回りの回転能率を計算しますので、カタログなどの添え字では回転軸にする座標軸の記号 y の方を使っています。後で説明する断面二次モーメントを表す場合も、カタログの座標記号に回転軸の方の座標記号を使っていますので、この節で説明する数学的な記号の使い方と異なっていることに注意します。

4.2.4 重心位置 x_o 、 y_o

重心位置は、そこを通る座標軸を使って、全断面積についての断面一次モーメントを計算すると、これが0になる条件で得られます。話が前後しますが、最初、断面図形を表す任意の座標軸を決めておきます。実用的な数値は、断面全体の幅と高さを表す外形寸法です。これは、部材を輸送するときに必要になります。これを考えるときは、座標軸の原点を左下（または左上）に置いて、負の座標値を使いませぬ。一方、数学的に考えるときは、幅と高さのほぼ中央に原点を置きます。式(4.2)の計算で全断面の断面一次モーメントを計算して、全面積の計算値、式(4.1)を使って重心位置を求めます。

$$\left. \begin{aligned} x_o &= \frac{Q_x}{A} \\ y_o &= \frac{Q_y}{A} \end{aligned} \right\} \dots(4.5)$$

重心位置が決まれば、重心位置から測った、断面の幅方向と高さ方向の、最大・最小寸法が計算できます。これは、3つ下の4.2.7項で、断面係数の計算のときに使います。

4.2.5 断面二次モーメント

断面二次モーメントの計算に使う定義式は、与えられた座標軸に関して、二つの座標数値を使う下の表現です。記号として I を使うこともあります。数字の1、 L の小文字と区別できるように J を使うことにします。

$$\left. \begin{aligned} J_{XX} &= \int_A x^2 dA \\ J_{YY} &= \int_A y^2 dA \\ J_{XY} &= \int_A xy dA \end{aligned} \right\} \dots(4.6)$$

力学では、図形の慣性モーメント(moment of inertia)とは、上の計算式から ($J_{XX} + J_{YY}$) の形で求め、 z 軸回りの図形の回転運動を扱うときのパラメータです。式(4.6)は、材料力学の方で、梁や柱の曲げ剛性を計算するときのパラメータとして使いますので、断面二次モーメントと言ひ、慣性モーメントの用語を使ひませぬ。もう一つ、気を付ける必要がある、カタログ表記の習慣があります。それは、式(4.6)の J_{XX} と J_{YY} とを、 J_Y と J_X のように X と Y とを一字使い、それも逆順で表していることです。この意味は、座標軸を擬似的に回転軸をして扱う計算をして、その座標軸の記号を使うからです。この章の説明では、数学的な整合性を持たせて座標記号を使ひます。

4.2.6 原点を重心にしたときの断面二次モーメント

断面二次モーメント J_{XX} と J_{YY} は、部材断面の重心に座標軸の原点があるときに極小値になります。その値の方を材料力学で利用します。したがって、式(4.5)で重心位置を計算しておいて、断面の座標軸を重心位置に移してから、式(4.6)を計算します。しかし、数値計算の手順として、計算に便利なように座標軸を仮に決めておいて、その座標値を使って重心位置と断面二次モーメントを計算する方法も使ひます。その場合の計算式を下に示します。座標記号の添え字(suffix)が幾らか賑やかになります。

$$\left. \begin{aligned} J_{XX0} &= J_{XX} - Ax_o^2 \\ J_{YY0} &= J_{YY} - Ay_o^2 \\ J_{XY0} &= J_{XY} - Ax_o y_o \end{aligned} \right\} \dots(4.7)$$

なお、式(4.7)の上の二式は、下の形でも使ひます。

$$\left. \begin{aligned} J_{XX0} &= J_{XX} - Q_x x_o \\ J_{YY0} &= J_{YY} - Q_y y_o \end{aligned} \right\} \dots(4.8)$$

4.2.7 断面係数の計算

図 4.2 のような二次元の応力状態で梁を使うとき、梁断面の応力度は下の式で計算します。

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad \text{ただし、} W = \frac{J}{y} \quad \dots(4.9)$$

式(4.9)の W を断面係数と言います。記号に Z も使います。正の曲げモーメント M が作用した状態では、梁断面の重心位置から上が圧縮応力度、下が引張応力度になります。応力度の絶対値が最大になるのは、重心から最も離れた位置です。図 4.2 では、梁の局所座標系 y の正の向きは、下を向いています。重心からの梁断面の上縁・下縁までの距離を y_{MAX} 、 y_{MIN} の記号で表したとき、ここでは y_{MIN} が負の数になります。この約束にしておくと、圧縮応力度が負の数で計算される便利さがあります。ところで、曲げモーメントは、部材の応力状態を表す一つの力学量です。部材の応力度に注目すれば、高さ方向で変化します。したがって、曲げ応力度 という言い方を便宜的には使いますが、正確に言いたいときは曲げモーメントによる上縁または下縁の繊維応力度 (fiber stress) と言います。部材断面図形が上下対称であるときの断面係数は、材料のカタログに数値が載ります。これは、非常に実用的に使うことができます。或る曲げ部材に作用する設計曲げモーメント M が計算できているとして、材料の許容応力度を σ で使うとすると、所要断面係数は $W = M / \sigma$ です。カタログからこの数値よりやや大きめになる断面係数の部材を探すことで、設計作業を効率的に進めることができます。ただし、カタログに記述される断面係数の添え字は、高さ方向 y 座標で計算するのですが、 W_x と表記されていることに注意します。

4.2.8 断面回転半径の計算

回転半径は、圧縮材の座屈荷重を計算するときに必要なパラメータであって、次の式で求めます。なお、単に回転半径と言うと、自動車の走行や鉄道・道路の線形でも使いますので、断面回転半径または断面二次半径 (radius of gyration of area) と言います。

$$\left. \begin{aligned} r_x &= \sqrt{\frac{J_{XX}}{A}} \\ r_y &= \sqrt{\frac{J_{YY}}{A}} \end{aligned} \right\} \dots(4.10)$$

記号 r に代えて i を使うこともあります。このパラメータの座標記号の使い方は、前項で説明したと同じで、材料のカタログに使われている座標とは x 、 y 軸の表記の約束が逆になっていることに注意します (表 4.1 参照)。直線部材の長さ L との比 (L/r) を細長比 (slenderness ratio、音読みも訓読みも使います) と言い、派生的に定義される工学的パラメータです。圧縮材の設計では座屈変形を抑えるために上限値を決めます。引張り材では、振動し易くなるのを避けるため、こちらも上限値を決めます。

表 4.1 H形鋼のカタログ数値の例 (デザインデータブックより)

H形鋼 (JIS G 3192)

標準断面寸法 mm					断面積 cm ²	単位質量 kg/m	断面二次モーメント cm ⁴		断面二次半径 cm		断面係数 cm ³	
呼称寸法 (高さ×辺)	H×B	t ₁	t ₂	r			I _x	I _y	i _x	i _y	Z _x	Z _y
100×50	100×50	5	7	8	11.85	9.30	187	14.8	3.98	1.12	37.5	5.91
100×100	100×100	6	8	8	21.59	16.9	378	134	4.18	2.49	75.6	26.7
125×60	125×60	6	8	8	16.69	13.1	409	29.1	4.95	1.32	65.5	9.71
125×125	125×125	6.5	9	8	30.00	23.6	839	293	5.29	3.13	134	46.9
150×75	150×75	5	7	8	17.85	14.0	666	49.5	6.11	1.66	88.8	13.2
150×100	148×100	6	9	8	26.35	20.7	1000	150	6.17	2.39	135	30.1

4.2.9 断面の主軸の向き

平面構造力学で梁の応力と変形を扱うときは、梁の断面形状は、上下に非対称であっても、左右対称の断面図形に構成します。実際の構造部材は、必ずしも左右対称に製作・架設されない場合もあります。断面が左右非対称の梁に、垂直方向の荷重などで曲げモーメントが作用すると、梁は垂直面内の曲げの他に、その面から逸れる曲げ変形分がでます。この場合は、式(4.7)に示す梁断面図形の断面二次モーメント J_{xYO} が0になっていません。この非対称断面図形を幾らか回転させた状態で使うと、垂直面から逸れる曲げ変形を起こしません。この向きを、その断面図形の主軸方向と言います。主軸方向を求める計算は、第3章で解説した主応力、主歪みの方向を求める計算と同質であって、モール円を使う図形解析も応用できます。主軸の向きは、元の (x、y) 座標軸から左回りを正の向きとして ϕ で計り、 $\pm 45^\circ$ の範囲とします。この新しい座標軸の記号を (ζ 、 η) として、断面二次モーメントの変換式は、式(3.1)または式(3.6)と同じ原理の式です。主軸方向では $J_{\zeta\eta} = 0$ ですので、

$$\left. \begin{aligned} J_{XX} &= J_{\zeta\zeta} \cos^2 \phi + J_{\eta\eta} \sin^2 \phi \\ J_{YY} &= J_{\zeta\zeta} \sin^2 \phi + J_{\eta\eta} \cos^2 \phi \\ J_{XY} &= (J_{\zeta\zeta} - J_{\eta\eta}) \cos \phi \sin \phi \end{aligned} \right\} \dots(4.11)$$

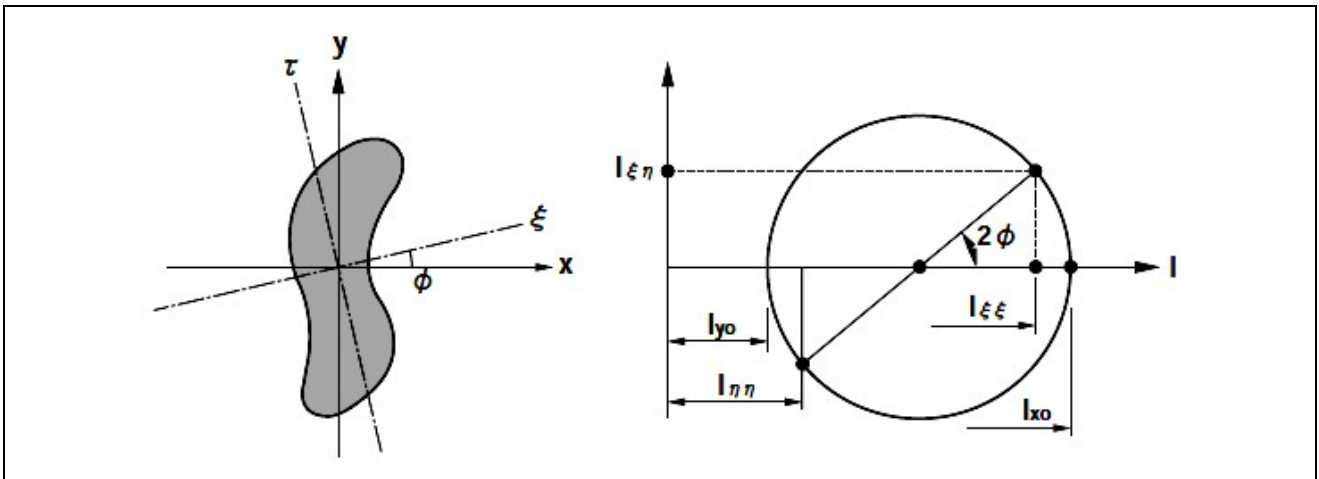
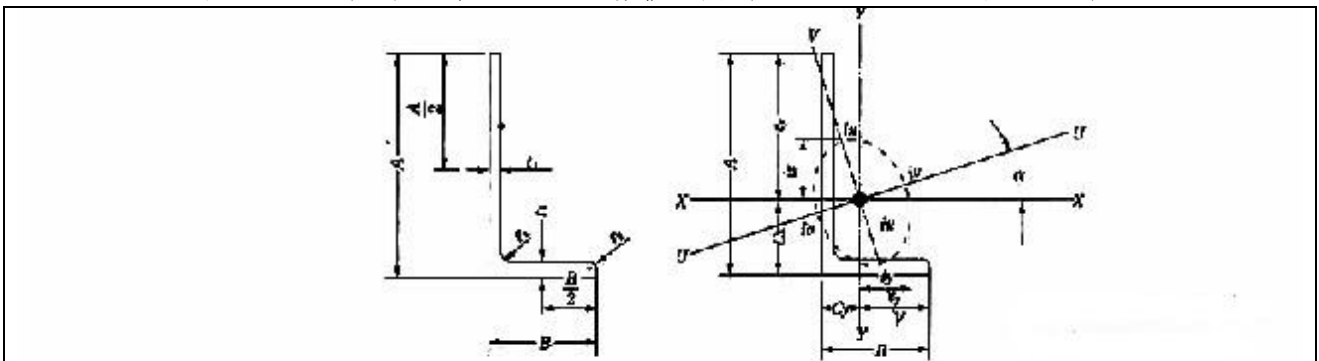


図 4.4 断面の主軸の向き

表 4.2 不等辺山形鋼のカタログ数値の例 (デザインデータブックより)



不等辺不等厚山形鋼 (JIS G 3192)

標準断面寸法 mm					断面積 cm ²	単位 質量 kg/m	重心の位置 cm		断面二次モーメント cm ⁴				断面二次半径 cm				tan α	断面係数 cm ³	
A × B	t ₁	t ₂	r ₁	r ₂			C _x	C _y	I _x	I _y	最大 I _{xx}	最小 I _{yy}	i _x	i _y	最大 i _{xx}	最小 i _{yy}		Z _x	Z _y
200 × 90	9	14	14	7	20.88	23.3	8.38	2.15	1210	230	1290	125	5.30	2.62	6.68	2.05	0.263	88.7	29.2
250 × 90	10	15	17	8.5	37.47	39.4	8.61	1.92	2440	223	2920	147	6.08	2.44	8.20	1.98	0.182	149	51.5
260 × 90	12	18	17	8.5	42.85	39.7	8.93	1.88	2790	238	2670	160	6.07	2.35	8.18	1.93	0.173	174	53.5
300 × 90	11	18	10	9.5	46.22	38.3	11.0	1.78	4670	245	4440	188	6.72	2.30	8.80	1.99	0.196	229	33.8
300 × 90	13	17	19	9.5	52.87	41.3	11.3	1.78	4540	259	5020	181	6.58	2.22	9.78	1.95	0.128	265	35.8

演習例題 4-1

- (1) 幅 b 、高さ h の矩形断面の梁において、高さの中央を通る水平軸に関する断面二次モーメントは、

$$J = \frac{bh^3}{12} \quad \dots(4.12)$$

である。この式を、積分法を使って導け。

解説：

この式は、材料力学では常識的な公式として頻繁に応用されます。計算原理は式(4.6)と(4.7)です。一般的な断面の多くは、幾つかの矩形断面を組み合わせる構成します。積分問題を解くことに挑戦して下さい。最初の y 座標の原点を矩形の底辺に置いてから重心位置に移す方法で公式を誘導して下さい。

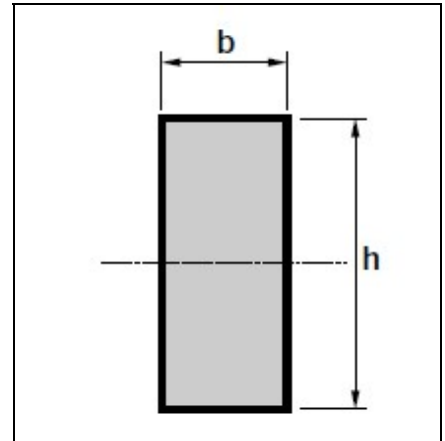


図 4.5 矩形断面の梁

- (2) 三角形の二辺を座標軸に合わせた直角三角形の幾何学的定数を表す代数式を求めよ。

解を示しておきます。式の誘導に挑戦して下さい。

$$A = ab/2 \quad \text{断面積}$$

$$(a/3, b/3) \quad \text{重心位置}$$

元の座標系で求めた断面二次モーメント

$$\begin{cases} J_{XX} = a^3b/12 \\ J_{YY} = ab^3/12 \\ J_{XY} = a^2b^2/24 \end{cases} \quad \dots(4.13)$$

重心を通る座標軸で求めた断面二次モーメント

$$\begin{cases} J_{XXO} = a^3b/36 \\ J_{YYO} = ab^3/36 \\ J_{XYO} = a^2b^2/72 \end{cases} \quad \dots(4.14)$$

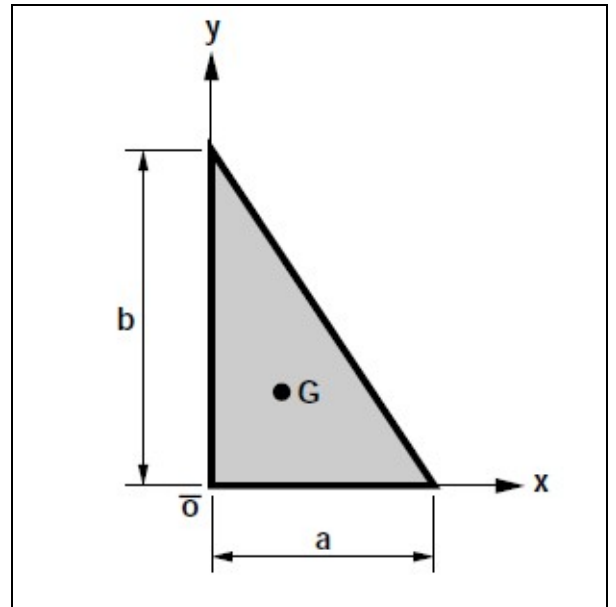


図 4.6 直角三角形での断面計算

解説：

手計算で任意の形状の断面定数を求めるときは、元の図形を幾つかの矩形と直角三角形の集合に分けます。コンピュータを使うときは、任意の向きの三角形の集合だけで計算することができます。

- (3) 外径 D 、内径 d のパイプ断面の断面二次モーメントの計算式を求めよ。

$$\text{解：} \quad J_{XX} = J_{YY} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \quad \dots(4.15)$$

解説：

ブレーンストーミングの例題として取り上げました。直径 d 、薄い肉厚 t のパイプ断面は、面積が $d t \pi$ です。これをコマの外周と考えると、単位厚のリングの慣性モーメントが簡単に計算できます。断面二次モーメントは、この $1/2$ です(4.2.5 項参照)。充実円断面では、 t を変数として積分すれば得られます。

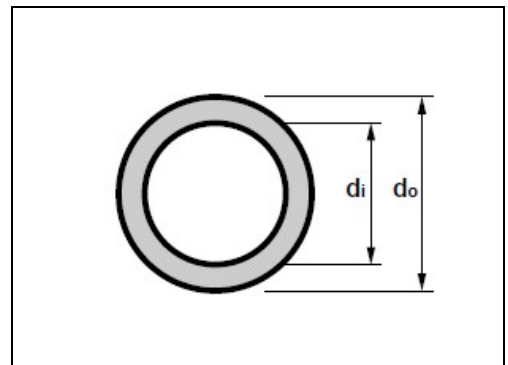


図 4.7

(4) 図 4.8 に示す非対称断面の主軸の向きと、最大最小二次モーメントを求めよ。

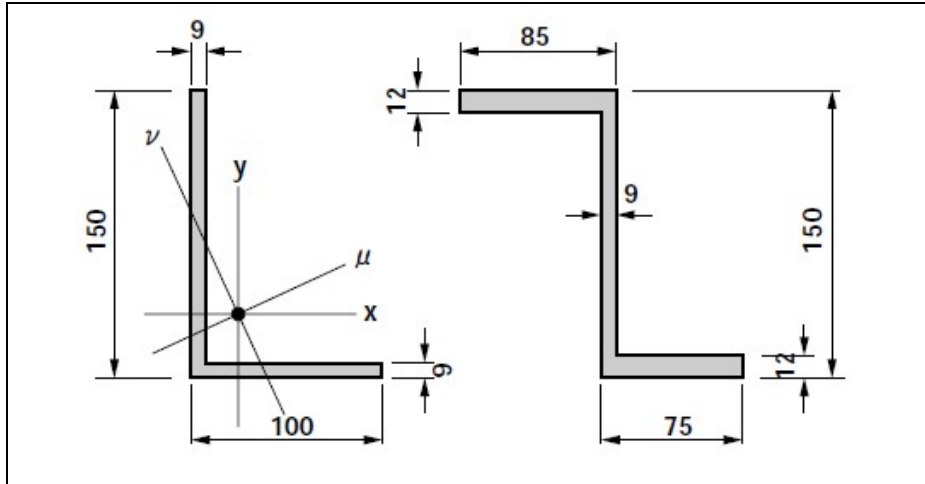


図 4.8 非対称な薄肉断面図形

不等辺山形鋼をモデル化した断面について数値解を例示します。

(i) 重心位置の計算

断面	幅	高さ	断面積	X座標	Q _x	Y座標	Q _y	J _{x0}	J _{y0}
	b	h	A	X	A · X	Y	A · Y	b ³ h/12	bh ³ /12
	cm	cm	cm ²	cm	cm ³	cm	cm ³	cm ⁴	cm ⁴
ウェブ	0.9	15	13.5	0.45	6.075	7.5	101.25	0.9	253.1
フランジ	9.1	0.9	8.19	5.45	44.6355	0.45	3.6855	56.5	0.6
Σ =			21.69		50.7105		104.9355	57.4	253.7
			X ₀ =	2.338	Y ₀ =	4.838			

(ii) 二次モーメントの計算

	断面積	X座標	Y座標			
	A	X	Y	A · X ²	A · Y ²	A · X · Y
	cm ²	cm	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
ウェブ	13.5	-1.888	2.662	48.1	95.7	-67.8
フランジ	8.19	3.112	-4.383	79.3	157.3	-111.7
			J ₀	57.4	253.7	0
Σ =	21.69		Σ =	184.8	506.7	-179.5
				J _{xx0}	J _{yy0}	J _{xy0}

(iii) 主軸の計算 (モールの円解析は、第 3 章、例題 3.2 の (2) の解法を参考にして下さい)

モールの円の中心座標： $J_0 = (J_{xx0} + J_{yy0}) / 2 = (184.8 + 506.7) / 2 = 345.8$
 底辺長さ ($J_{yy0} - J_0$) = $184.8 - 345.8 = -160.9$
 高さ = $J_{xy0} = -179.5$
 モールの円の半径： $r = \sqrt{(160.9)^2 + (-179.5)^2} = 241.1$
 偏角 (式 3.8) $\phi = 0.5 \times \tan^{-1} \{179.5 / (-160.9)\} = 23.4^\circ$
 $\tan \phi = 0.432$
 最大最小二次モーメント
 $I_{MAX} = 345.8 + 241.1 = 586.9 \text{ cm}^4$
 $I_{MIN} = 345.8 - 241.1 = 104.7 \text{ cm}^4$
 主軸は左回りに 24.1° 回転した向き

備考：

不等辺山形鋼のカタログに載っている数値と比較してみてください。ただし、カタログ製品は、断面形状に丸みの個所がありますので、角ばったモデルを使うこの計算数値とは僅かですが、差があります

5. 弾性的性質の数学モデル

5.1 線形弾性と非線形弾性

5.1.1 線形・非線形は数学用語であること

材料力学で言う弾性の定義は、力が作用して変形しても、力を抜けば元に戻る性質の総称です。力と変形の間を言うとき、一種類の力だけが作用し、その大きさが変化する場合を、最初に考えます。力と変形との関係が原点を通る直線式で表されるときが線形弾性です。しかし曲線を描くこともあります。これを非線形弾性と言いますが、塑性とは言いません。線形・非線形は、モデルを数学的に扱うときの性質を言う用語です。線形式は、一次式の特別な場合を言い、0の定義を持つことに注意します。力が0のとき、変形も0とする数学的約束です。一方、弾性・塑性は材料力学の用語です。弾性体に力を作用させて変形させることは、弾性体に仕事をすることです。この仕事は、弾性体の歪みエネルギーとなって弾性体内部に蓄積されて、一部は、熱エネルギーとなって弾性体の温度を上げます。熱が出ることは、摩擦によって熱が出ることと同質の、材料内部の内部摩擦によるものであって、理想的な弾性体は発熱しません。これを保存系ということがあります。それは、歪みエネルギーがポテンシャルエネルギー（位置のエネルギー）の性格があるためです。力を抜けば、その歪みエネルギーが解放されるのですが、内部摩擦があると温度を上げる方にも仕事をします。内部摩擦が有る材料を使って弾性範囲内で力と変形の間をグラフに描かせると、正確に同じ道筋を往復するのではなく、幾らかのループを描きます。このループの面積分が外から加えた仕事が内部摩擦によってする仕事に使われ、温度を下げるのではなく、上げます。気体の圧縮と膨張の性質とは異なります。温度の影響は、普通、考えることをしませんが、鋼材の引張破断試験をすると、破断個所が熱を持つことを体験できます。力を伝える機械製品の運転中に、他よりも温度が高い部材があれば、経験的に何かの欠陥があると判断することもします。静力学では時間の要素を考えませんが、力を加えて変形が落ち着くまでに僅かですが時間差があります。弾性体内部を力が伝わる速さがある、これが縦波、つまり、音として観察されます。

5.1.2 線形式は重ね合わせの計算法が使える

部材に、二種類の力を作用させるときの変形を、次に考えます。弾性材料であれば、線形・非線形に関わらず、作用させる力の順番を変えても、結果が同じになります。線形弾性のときは、個別に変形を計算しておいて、それを加算することができます。これを数学的には加算法または重ね合わせの方法が成り立つと言います。その応用として、単位の力を受けるときの変形を計算しておけば、任意の大きさの力が作用するときの変形が、単位の力を受けるときの変形を一定倍（スカラー倍）することで求められます。この応用が、構造物の解析で使う影響線法です。非線形弾性の部材は、この方法を使うことができません。鉄筋コンクリート部材の設計計算をするときの仮定は、「コンクリートは圧縮応力度と歪みに対して弾性的な（直線関係も曲線関係も含みます）性質があり、引張応力には抵抗しない」とします。これは、コンクリートを、圧縮と引張とを含めた全体を通した性質で見れば、非線形の弾性体とすることです。したがって、重ね合わせの方法を利用することができません。例えば、コンクリート梁に曲げモーメントと軸力が作用するときの部材内部の応力度分布を計算するとき、曲げモーメントだけが作用する場合と、軸力だけが作用する場合とを別々に計算しておいて、それを重ね合わせる方法が使えません。このことが、鉄筋コンクリートの計算を複雑にしている理由です。これは、次の第6章で例題として取り上げてあります。

5.1.3 材料力学では数式の適用範囲を考える

材料に作用させる力と変形の間は、変形の方を独立変数、力の方を従属変数とする数学モデルです。逆に考え易いので注意します。したがって、変形の大きさを無限大まで考えることもできます。材料には降伏点や強度の限界がありますので、数式が意味を持つ範囲を考える必要があります。複数の範囲に別々の数式を当てることもします。コンクリート材料数式モデルは、引張側に歪みを加えても応力度が出ないモデルです。材料力学は力学の応用ですので、数式を処理して得られる知見は重要です。しかし、材料固有の性質をどのように解析条件に反映させるかの判断に使うデータは、材料実物を使う実験から求めます。実験の実施は、設備を含め、費用も掛かりますので、誰でもできるとは限りません。したがって、他の研究者が行った実験データを利用させてもらうことが多くなります。理想はそうですが、主観的な色眼鏡を通した判断（仮説）で整理されているデータも多くあります。因みに、英語の data は、known facts と説明されることがあります。これには、主観を含まないとする意義を持ちます。

5.2 線形弾性として扱う便宜的な方法

5.2.1 材料は品質管理されて提供される

材料の力学的な性質を、実験を含め、学問的に研究する態度は重要です。その結果を利用して部材の設計に応用したいときは、なるべく単純化したモデルで提案する態度に切り替えます。その代表的な扱いに、弾性係数（ヤング率）があります。理想的な弾性体は、応力度と歪みが比例するモデルを考えます。これは、弾性係数を定数で扱う線形の数学モデルです。実際の材料は、実験を詳細にすればするほど、線形の仮定からのズレが観察されます。鋼材はまだしも、人工の石材であるコンクリートの弾性的性質は、様々な現れ方をしますので、これから設計・建設したい構造物の弾性的性質を見積もるときに困ります。そのため、コンクリート材料は、力学的な性質を予測できるようにする品質管理技法の研究に多くの努力が払われてきました。捉えどころのない材料の性質を、客観的で具体的な数値データで扱えるようにするには、欧米の合理主義的な考え方が必要でした。その成果として、現在では、生コンクリート工場のように、品質管理をコンピュータで制御する円熟した技術が使えるようになりました。これは技術の発展として喜ぶべきことですが、一面で、全体がブラックボックス化して、技術知識の空洞化にもなっています。したがって、教養として、この全体についての技術史的な知識を埋めておく必要があります。材料力学の視点に話を戻すと、予定される材料の、特に弾性係数の表し方を理解する必要があります。

5.2.2 接線弾性係数

実際の構造物の変形状態は、過去の応力と変形の履歴の結果です。構造物では、死荷重だけが作用している状態です。応力度の分布がどうなっているかは外見からは分かりません。この状態を仮の基準0としておいて、追加の荷重、例えば活荷重を載せて変形を求めるときの計算をするときに使う弾性係数は、現在の応力と歪みの関数関係で表しておいて、微分的に考えた荷重と変形の増分の比を使います。これは、応力度と歪み曲線において、或る応力度のときの接線を利用することになりますので、**接線弾性係数** (tangent modulus of elasticity) と言います(図 5.1)。コンクリート材料は鋼材に較べて大きな非線形性を示します。実用される応力度の付近、例えば許容応力度の約 1/2 前後での接線弾性係数は、線形弾性体並みの定数扱いで提案されています。これを、下に説明する動弾性係数と区別して**静弾性係数**と言うことがあります。コンクリートは、鉄筋コンクリートとして利用することが多いので、鋼の弾性係数との比 n の数値が実用されています。橋梁構造物では、活荷重の変形計算には $n = 7$ が標準です。コンクリートの応力度が 0 の状態での接線弾性係数は、静弾性係数の 10 ないし 40% 大きく得られます。この測定は、超音波がコンクリート試験片を伝播するときの音速を測定する原理の、動弾性試験方法で得られますので、**動弾性係数**と言います。

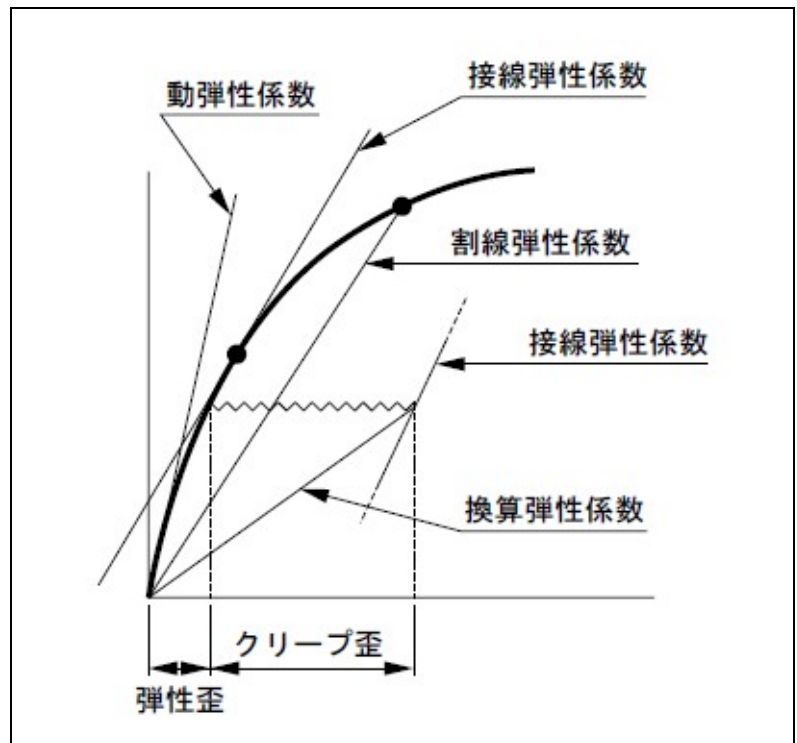


図 5.1 実用される弾性係数の種類

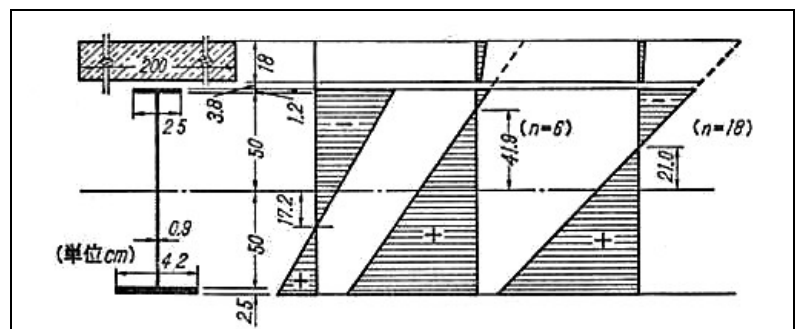


図 5.2 n の違いによる合成桁の応力度分布

5.2.3 割線弾性係数

非線形の弾性的性質も持つ材料は、応力度を増やして行く途中の、変形の道筋が直線になりません。その途中を無視して、最初の0と最後の応力度と歪みとを直線で結んだ傾きで弾性係数を定義するとき、**割線弾性係数**（セカント弾性係数：Secant Modulus of Elasticity）と言います。長い弾性針金の変形は、ミクロの長さでは線形弾性の性質があっても、その累積である全体変形は非線形の性質です。この場合の部材としての剛度も、最初と最後だけに注目する線形化で扱うこともします。この扱いは、あらゆる数学的非線形問題を解くときの解決法として応用され、理屈を付けたいときは線形化理論などの名称が見られます。割線弾性係数は、コンクリート構造物の死荷重による応力と変形を計算するときに応用されています。コンクリートは、死荷重のような、持続的に作用している応力場では、歪みが時間的に増加していくクリープ現象が見られます。クリープによる歪みは、コンクリートの材令が若い時期から荷重が作用するほど大きく表れ、或る期間が経過すると止まります。クリープ歪みの大きさは、静弾性係数を考えたときの歪みの2ないし3倍になることがありますので、コンクリート橋では計画した路面の縦断勾配が変化することがあります。そのため、建設計画では、完成直後の形状と、クリープが終了した場合の形状との変形を計算しておく必要があります。ここに割線弾性係数の考えを使います。コンクリートのクリープ係数 ϕ は、クリープで生じる歪み分と弾性歪み分との比で与えます。コンクリートの計算では、ヤング率を使う代わりに鋼のヤング率との比として n を使う習慣ですが、代わりに $n' = (1 + \phi) n$ を使ってクリープ発現後の撓み計算をします。この弾性係数は、考え方としては割線弾性係数ですが、**換算弾性係数** (reduced modulus of elasticity) と言い換えることがあります (図 5.1)。

演習例題 5.1

図 5.2 は、死活荷重合成桁とした断面計算の一例です。コンクリートのヤング率を変えた二種類の断面定数の計算法を示します。応力度の計算は、全死荷重モーメント 63 tf-m を受けるとき、鋼桁だけで受けたとき、完成直後 ($n=6$)、クリープ発現後 ($n=18$) の各場合を比較したものです。

種 類	A (cm ²)	y (cm)	Ay (cm ³)	Ay ² (cm ⁴)	J ₀ (cm ⁴)	(kgf/cm ²)
コンクリート(200×18)	3600	64	230400	14745600	97200	
コンクリート(n=6)	600	64	38400	2457600	16200	
コンクリート(n=18)	200	64	12800	819200	5400	
鋼(25×1.2)	30	50.6	1518	76810	--	
鋼(1000×0.9)	90	0	0	0	75000	
鋼(42×2.5)	106	-51.25	-5381	275790	55	
鋼桁	225		-3863	427655		
	$e = -3863/225 = -17.2 \text{ cm}$ $I_s = 427655 - 17.2 \times 3863 = 361000 \text{ cm}^4$ $W_{SU} = -361000/68.4 = -5280 \text{ cm}^3$ $W_{SL} = 361000/35.3 = 10230 \text{ cm}^3$					$\sigma_{SU} = -1193$ $\sigma_{SL} = 616$
合成桁(n=6)	825		34537	2900455		
	$e = 34537/825 = 41.9 \text{ cm}$ $I_v = 2900455 - 41.9 \times 34537 = 1453000 \text{ cm}^4$ $W_{CU} = (-1453000/31.1) \times 6 = -280000 \text{ cm}^3$ $W_{CL} = (-1453000/13.1) \times 6 = -665000 \text{ cm}^3$ $W_{SU} = -1453000/9.3 = -156000 \text{ cm}^3$ $W_{SL} = 1453000/94.4 = 15390 \text{ cm}^3$					$\sigma_{CU} = -23$ $\sigma_{CL} = -9$ $\sigma_{SU} = -40$ $\sigma_{SL} = 409$
合成桁(n=18)	425		8937	1251255		
	$e = 8937/425 = 21.0 \text{ cm}$ $I_v = 1251255 - 21.0 \times 8937 = 1064000 \text{ cm}^4$ $W_{CU} = (-1064000/52.0) \times 18 = -368000 \text{ cm}^3$ $W_{CL} = (-1064000/34.0) \times 18 = -563000 \text{ cm}^3$ $W_{SU} = -1064000/30.2 = -35230 \text{ cm}^3$ $W_{SL} = 1064000/73.5 = 14480 \text{ cm}^3$					$\sigma_{CU} = -17$ $\sigma_{CL} = -11$ $\sigma_{SU} = -179$ $\sigma_{SL} = 434$

5.3 線形弾性体として扱う柱と梁

5.3.1 三次元的に考えるときの問題

細長い部材の力と変形を三次元的に扱うときであっても、理想としては6成分の応力と変形が独立に計算できるのが最善です。次善の扱いが二次元的な面内の力と変形とに注目して、柱と梁に使うことで済ますようにします。しかし、一般的に三次元的に考えるときは、力と変形の性質がどのような問題があるかの知識も必要ですので、最初に簡単な説明をしておきます。これは、第4章式(4.1)に紹介した、変位のマトリックスについて、その非対角線成分の説明です。

- (1) 柱に軸力が作用すると曲がる：ベッティの相反作用の法則 (reciprocal theorem、F.Betti, 1823-1892) から、逆に、曲げモーメントが作用すると軸方向の変形が生じます。これは、式(4.1)の対角線要素について、対称な位置にある成分が等しくなることの原理です。部材断面の重心に軸力を作用させるように部材側の局所座標系を変換することで、このマトリックス成分を0にできます。なお、以下の説明では、相反作用の対になる方の力と変形の説明は省きます。
- (2) 一平面内で曲げモーメントを作用させても、面外にも曲げが起きる：これは、部材断面の二方向の断面二次モーメントが異なり、主軸が断面計算に使った座標面と、或る角度だけ傾くときです。
- (3) 柱に軸力が作用すると剪断変形が起きる：これはトラスのような構造物をマクロに見て均質な部材にモデル化するときを考えることができます(図5.3)。トラスに組む斜材をすべて同じ向きに揃えると、この変形が出ます。トラス橋の水平構は、この変形を避けるためにダブルワーレンに組みます。
- (4) 柱に軸力が作用すると部材軸回りに捻じれる：上の(3)で組み上げたトラスを4面使って、斜材が螺旋形になるような立体トラスの柱に組み上げると、この変形が出ます。また、鋼材の素線を螺旋状に撚り合せて作るワイヤロープは、撚りの向きを交互に変えて何層かを重ねあわせ、全体として、この捻じれが最小になるように製作されます。

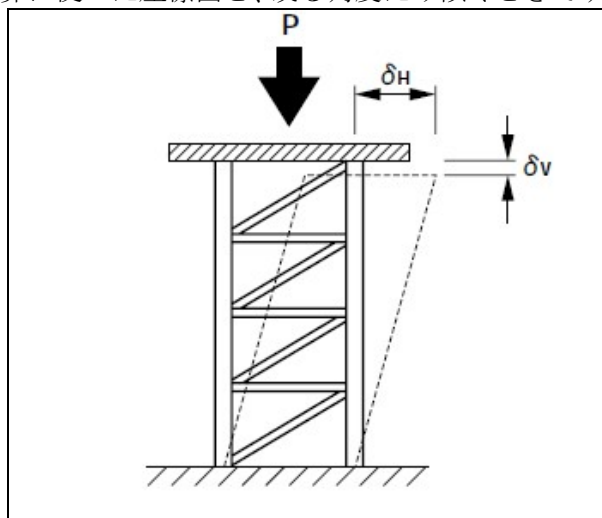


図5.3 軸力が作用すると剪断変形がでる

- (5) 剪断力が作用すると部材が捻じれる、また、部材を振ると剪断変形を起こす：これは剪断中心または捻じれ中心が重心位置とずれるような非対称断面で起こります。この説明は、第7章で、扱います。

5.3.2 柱と梁材に適した自然の高木

木造住宅の柱や机の脚に見るように、圧縮力を受け持たせる柱は、高さに応じて幅と厚みを広くしないと曲げ剛性が不足します。杉や檜のような真っ直ぐに伸びる自然の高木(喬木)は、成長するにつれて相対的に幹が太くなりますので、力学的にバランスの取れた、長さの長い柱や梁として、そのまま使うことができます。ヨーロッパから西アジアでは、15世紀中ごろから17世紀中ごろまで続いた大航海時代に、高さが必要な帆船のマスト材に適したレバノン杉が大量に伐採され、現在ではレバノンの一部にしか自生していないほど少なくなり、世界遺産に登録されるほど貴重な木材資源になってしまいました。一方、パイプ断面の竹は、細い径でも相対的に高さが高く育ちます。しかし、寸法選択の範囲が狭いので、汎用の構造材料には向きません。これら自然のままの材料は、曲げだけでなく、捻じれに対しても、そこそこの剛性があるので、梁または柱として実用になります。人工的に工夫した断面形は、材料を経済的に構成することを目的としますが、捻じれ剛性が小さいことが問題になることがあります。有史以前、世界的に見て豊かな森林資源を使った巨木文明がありました。ノアの箱舟、トロイの木馬の伝説は、木材が豊富に利用できたことを示唆しています。日本でも、出雲大社が巨木建築でした。奈良東大寺の大仏殿の建立(758)には、近畿一円の巨木があらかた使われてしまい、千年経った現在でも巨木の森林資源の回復がありません。火災で焼けた大仏殿の再建(1691)には巨大な横梁(大虹梁)2本が必要でしたが、元の寸法に使える巨木が見つからず、結果的に大仏殿の横幅寸法を2/3にしなければならませんでした。伝統的な日本の住宅建築は、最小の加工にとどめた大きな寸法の大黒柱を使います。これが住宅全体の耐震性にも、実質的に大きな寄与をしています。

5.3.3 圧縮材にはパイプ構造がよいこと

柱は、圧縮力の合力が断面の重心を通るようにできれば、最も効率のよい材料の使い方ができます。しかし、偏心して作用することも普通ですので、曲げモーメントが同時に作用し、圧縮応力度の分布に偏りができ、結果的に柱の断面積を大きくしなければなりません。最も効率のよい断面形状は円形のパイプ構造です。薄い肉厚にすると、部分的に座屈変形がでますので、肉厚を最大にした極限が充実体の円断面です。構造材料としての円形の柱は、材料の加工と組み立てに不便なことが多いので、矩形を組み合わせた断面形状を採用します。正方形のパイプ断面に構成するのが実践的な構造です。形鋼には、薄板を組み合わせて種々の幾何学的形状の製品があります。この断面設計は、なるべく少ない材料（断面積）で大きな曲げ剛性を持たせるための工夫があります。綴じたパイプ断面に製作することは作業が難しいので、H形鋼が多く使われています。主に曲げ材として使うことを目的とした材料ですが、柱としても多く利用します。ただし、単独の独立柱として主構造に使うことは少なく、骨組みに組み込むように使いますので、捻じれの検討にはあまり注意が向きません。

5.3.4 柱と梁の応力度分布の計算仮定

部材内部の応力度分布がどのようになっているかは、外見からは分かりません。外力が全く作用していなくても、内部で複雑に釣り合っている応力度分布が存在していることがあります。これを内部応力または残留応力と言います。これが材料を自然に変形させることがあることも、経験的に知られています。焼き入れ、溶接などの熱処理を加えた鋼材は、この変形を避けるため、焼き鈍しなどが行われます。木材なども含め、「材料をしばらく寝かせておく」と言う表現を聞きますが、時間経過と共に、内部応力などが自然に減ることを利用する経験的な方法です。材料力学を設計に応用する場合には、外力の作用によって、材料内部がどのような応力度分布になるか、の知識を主題とします。そのときの理論仮定に、次の三つの理論モデルが利用されます。どの仮定も、数学的な処理に便利なように近似させるモデルです。

- 1) フックの法則
- 2) 平面保持の仮定
- 3) サンプナンの原理

5.3.5 学問的知見と実務的な応用

材料力学では、材料を均質な連続体と仮定します。実際の材料が、上に挙げた三つの理論モデルからどれだけずれるか、このことを数学的に取り上げるのは学問的な興味からの研究です。これに取り組むと、材料をミクロに扱う方向に視点が向きます。しかし、例えば、コンクリート材料は、砂利や砂の寸法までミクロに観察するところで均質な仮定が破綻します。鋼材は、顕微鏡レベルで結晶構成の不連続が観察されます。したがって、例えば、(1)力と変形との関係がフックの法則から逸れることの研究結果があるとしても、設計モデルに応用するときは、単純化した線形モデルを使うのが勝ります。(2)平面保持の仮定は、部材断面に剪断応力度の分布を考えると成立しません。これも、部分的には局部応力と関係しますが、(3)サンプナン(St. Venant: 1797-1886)の原理を適用して実用的な解釈をします。この原理は「局部的に釣り合っている力によって生じる応力度の分布と大きさは、そこから十分に離れた場所では無視できる」と言うものです。定量的にどの程度離れ、また無視できる大きさがどの程度か、については特に説明がありません。具体的な応用の一例として、図 3.13 に示した鋼材の引張試験片の、寸法の決め方と、試験結果の解釈法が JIS で規格化されています。試験片を啣(くわ)えて引張力を作用させる個所では、板厚方向に締め付け力が作用します。これは部分的に釣り合っている力です。この横締め力で生じる摩擦力で試験片に引張力を働かせるのですが、力の流れは部分的には複雑であって、どうなっているかは分かりません。しかし、試験片の中央では、応力度分布の乱れが最小になることが予測されます。つまり、引張応力度の平均値を引いた残りの応力度分布は、局部的に釣り合っている力だからです。試験片の長さ方向に見て、部材断面の歪みエネルギーを考えると、試験片の中央で極小になり、試験片の破断は常に試験片の中央付近で起きます。鋼材の破壊条件として、フォン・ミーゼス(Richard von Mises; 1883-1953)の破壊歪みエネルギー一定説がありますので、それで説明できる現象です。コンクリートのような脆性材料は、剪断または引張の最大応力度になる個所で破壊します。したがって、局部的に応力度が大きくなるような形状や使い方を避けます。

5.4 柱の座屈の現れ方

5.4.1 仮想変位を理解する

構造物の安定・不安定を扱うとき、普通ならば考えない変位が出たらどのように振る舞うかの数学モデルを考えます。これを**仮想変位**(virtual displacement)と言います。変位を起こすには何かの力の作用を必要とするとして、釣り合い問題を扱うとき、**仮想仕事の原理**が応用されます。このときは、仮想変位の方向に力を考え、その力と力方向の変位の積である仕事に注目します。しかし、座屈を扱うときに考える仮想変位は、力の作用方向とは直交する方向を考えますので、力学的な安定問題では盲点になっていました。理論的に扱う柱は、真っ直ぐを仮定します。実際に製作される柱は微妙な横変位がありますので、これを仮想変位とします。数学的にモデル化するときは、確率的考え方をします。しかし、確率・統計的方法を理論家は好まない傾向があります。図 5.4 は、柱の座屈を考えるときのモデルです。仮想変位を正弦波形で扱いますが、その大きさと向き（正負）とは全くの仮想値です。

5.4.2 柱の弾性座屈の原理

細長い柱の両端で、重心位置に軸力を作用させたとしても、幾らか初期撓み（これが仮想変位です）があると、柱の途中で曲げモーメントが増え、曲げ変形の大きさをさらに増やす方に働きます。柱として利用するとしても、梁としての曲げ剛性が必要です。圧縮力を大きくすると、結果的に曲げで柱が破壊します。理論的に扱うモデルは、図 5.2 に示したような横向きの梁を考えて、梁として解析します。両端から軸力 P (符号は負) が作用しているとし、梁は、長さ L に対して、中央で横方向に僅かな初期撓み（仮想変位） y_0 で曲がっていたとします。 P が圧縮力であると、柱に余分の曲げモーメントが作用し、撓みが増えます。増える分の中央撓み y_1 と初期撓みの比を計算すると、式 5.1 が得られます。ただし、梁の初期撓み変形を正弦曲線 (sin) を仮定します。

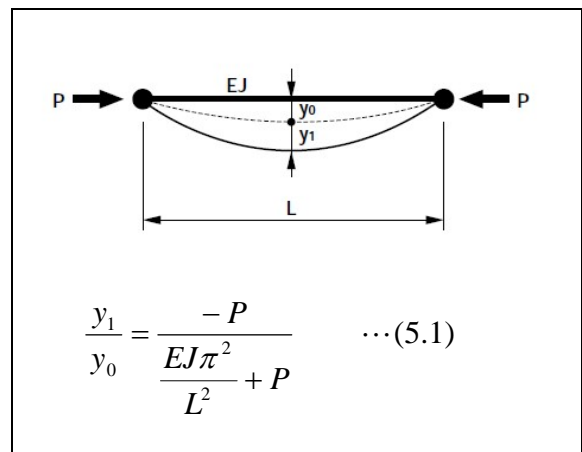


図 5.4 初期変形がある柱の圧縮

5.4.3 柱の弾性座屈が起こるメカニズム

式(5.1)から次のことを帰納する（導く）ことができます。まず軸力が引張力であれば、初期撓みがあっても、それを減少させる作用があり、圧縮力は逆に増幅するように働きます。式の上からは、分母を 0 にする荷重 P のとき、横撓みが無限大になります。これが両端で単純に支持された柱の座屈荷重の理論値です。**オイラー** (Leonhard Euler ; 1707-1783) の座屈荷重とも言います。この式には材料の強度の性質が反映してなくて、材料は理論的に完全な弾性体を仮定することになりますので、弾性座屈と言います。材料力学で扱う場合には、荷重に代えて柱の平均軸応力度 σ と、部材断面の回転半径 (4.2.8 項参照) から派生的に定義された**細長比** (L/r) を使って、座屈応力度の式にします（応力度の符号は圧縮応力度を正として示します）。

$$\sigma = \pi^2 E \left(\frac{r}{L} \right)^2 \quad \dots(5.2)$$

柱の弾性座屈現象は、1m の竹製、または 30cm のプラスチック製の柔らかな物差しがあれば、教育目的に向く、安全で手近な実験ができます。スチールテープ製の巻尺も便利です。長い物差しは初期変形がありますので、図 5.2 の状態を実験できて、変形が圧縮力に比例して増加することを経験できます。スチールテープは、或る長さ引き出した部分は、薄いテープの横方向が弧状になって、一応の曲げ剛性を示す真っ直ぐな柱になります。これ、または短い物差しに圧縮力を加えていくと、或る瞬間に突然曲がります。そのときは、真っ直ぐな状態まで抵抗していた力が小さくなります。この実験の場合には力加減ができます。しかし、実際構造のモデルに錘を載せていく状態を作ると、曲げ変形に歯止めが掛かりませんので、危険な破壊を起こします。材料実験の話は第 9 章でしますが、柱の座屈実験をするとき、安全に実験するための注意が必要です。材料試験機では、強制的に変位させるメカニズムを使って、結果的に柱に圧縮力を作用させます。座屈が起きると、変位が急に増加しますので、荷重の方が下がります。そこで実験を中止することができて、大きな変形に進む危険な状態を避けることができます。

5.4.4 短柱の座屈の現れ方

圧縮柱の理論上の耐力は、全断面の応力度分布が降伏点になったときとします。実際に圧縮柱として設計したい部材は、圧縮力が断面の重心を通るように工夫した構造に製作します。理論に合わせたいときは、柱の両端にピン構造を採用します。そうしないことが多いので、圧縮柱の中の応力は、偏心軸力によって曲げモーメントも作用します。そうすると、断面内の応力度分布が一様になりません。一つの理想として、断面内のどこにも引張応力度が出ない状態を考えます。応力度が材料の降伏点を超えると塑性的な性質が現れます。式 5.2 で、応力度が材料の降伏点になるときの細長比 (L/r) を、一つの**限界細長比**を与えます。この (L/r) より大きいとき、工学的に**長柱**、小さいときを**短柱**と言います。この区別は、材料強度によって変わります。例えば、構造用鋼材 SS400 (旧基準の SS41) では、降伏点が約 2400kg/cm^2 程度ですので、限界細長比 (L/r) は 93 です。軸力の偏心量の実際は分かりません。仮に断面の端で圧縮応力度が 0 であれば、反対側の圧縮応力度は断面全体の平均応力度の約 2 倍になり、降伏点を超える部分が出ると、見掛け上の降伏点応力度が $1/2$ に下がります。このときの細長比は 131 です。因みに、鉄筋コンクリート柱の場合、限界最長比は約 35 が使われています。実用的な数値としては、矩形断面のコンクリート柱では、高さとの比で 10 以下が短柱です。

5.4.5 座屈実験の結果と解釈

圧縮力を受ける鋼部材の断面形状を設計する参考のため、多くの圧縮実験の研究があります。実験データを整理するとき、柱が耐荷力の限界に達したときの断面の平均応力度を、細長比を横軸にしてプロットします。そのときの参考に、オイラーの座屈応力度の式を使います。降伏点は材料の種別で異なりますので、降伏点の高さを合わせ、そのときの限界細長比も合わせるよう座標変換してグラフ化した例を図 5.5 に示します。理論的な予測は、長柱領域でオイラー曲線に乗り、短柱領域では降伏点を通る水平線に乗るのですが、実際の測定値は角が取れた曲線になり、全体は平均すれば理論値を下回ります。前項で説明したように、降伏点の $1/2$ で座屈する細長比の位置は、限界細長比の 1.4 倍であって、この位置から右では、オイラー曲線と実験値とが大体一致します。なお、実用される部材では、長さが長いと自重による曲げも大きくなることと、振動しやすくなりますので、最大細長比の制限があります。主要部材で 120、二次部材 (横構など) では 150 です。座屈実験の場合もこれを考えて計画します。設計示方書では引張材でも最大細長比の制限があります (主要部材で 200、二次部材で 240 です)。

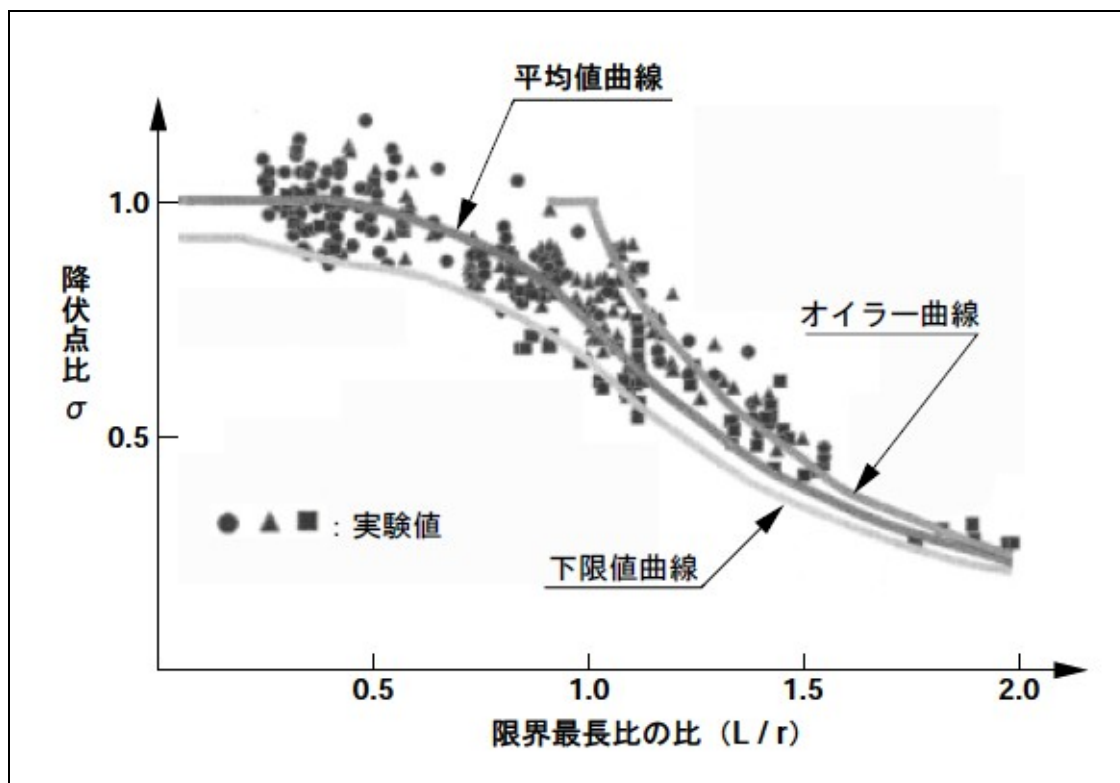


図 5.5 柱の座屈実験結果のデータ集合例 (青木哲彦)

5.4.6 設計実用式の工夫

圧縮力を受ける部材の断面形状を設計するときは、予備的に柱の圧縮実験の結果を参照して、使い易い許容圧縮応力度の実用式を提案したいところです。これについては、従来から多くの議論があります。基本的な態度は、平均的な実験値の曲線を、或る安全率で割った形で提案します。この安全率の選び方が第一の問題です。長柱が座屈で曲げ破壊を起こすときは、オイラーの座屈で説明できますので、これを弾性座屈と言います。長柱の曲げ破壊は、その柱を含む全体構造系の崩壊に繋がることが多いので、部材としての設計安全率を高くします。土木構造物の場合、崩壊を考える場合には安全率を3とするのが一つの常識です。一方、十分に短い長さの柱は、曲げ変形は僅かであって、断面全体が降伏点に達したところが耐荷力の限度です。この場合には、未だ柱としての形を保っていますので、安全率を約2まで下げています。そうすると、細長比が0から限界細長比に間で、安全率を2から3に滑らかに変化させる必要があります。この範囲を塑性座屈と言います。最も単純な実用式は、古い示方書の規定に見られるように $(L/r)^2$ をパラメータとした式です。SS41の場合には下の形です。この式は示方書から引用したのではなく、上で説明した論理から導いた参考値です。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \sigma_a = 1200 - 0.046 \left(\frac{L}{r} \right)^2 ; \quad L/r < 93 \\ \text{(b)} \quad \sigma_a = 800 ; \quad L/r = 93 \\ \text{(c)} \quad \sigma_a = 6.9 \times 10^6 \left(\frac{r}{L} \right)^2 ; \quad L/r > 93 \end{array} \right\} \dots (5.3)$$

単位：kgf/cm²

5.4.7 設計示方書への反映

この項は、筆者の私見です。一般論を言うと、設計提案に使う式は、実験結果と理論的な根拠とを踏まえるのですが、かなり提案者の忖意が入ります。研究者は、実験結果を合わせる実験式を提案したがあります。これには、三角関数、指数関数、対数関数などの高級関数を含むことがありますので、実務の数値計算に使うとき迷惑なことがあります。二次式または三次式までの代数式であれば、単純な電卓で計算できます。平方根を求める計算は、比較的需要が高いため、この関数を含む電卓も一般的な製品です。高級関数の計算には、少なくとも関数電卓が必要ですが、あまり一般的な道具ではありません。パソコンのアクセサリプログラムには入っています。しかし、パソコンが使えない環境ではお手上げです。現在（2011）の道路橋示方書では、鋼柱の設計許容応力度の式は、細長比を三つの区間に分けてあります。細長比で0から約20までは一定値、そこから限界細長比までの短柱領域を直線式で単純化してあります。長柱領域は、式5.3をやや複雑にした式です。面倒なことは、鋼種違いと板厚違いも勘案するようになっています。理論上は、長柱の座屈応力度は、式5.2に示すように鋼種に関係しません。鋼種が同じでも板厚違いを考慮することの根拠は、材料試験で寸法効果が出ることを勘案したためであって、板厚が大きい場合には許容応力度を下げた式になっています。式の種類が多いことは、一見すると親切で厳密な提案ができると錯覚します。しかし、例えば、別の鋼種を使いたいときに、どのように応用すればよいかの提案ができません。また、設計応力の検証に使うときは、この許容応力度式にぴったりと合わせることもしません。そうであるならば、設計者の自由な判断を引き出すためには、もう少し大らかで単純化した実用式の提案が望まれるところです。

6. 部材断面内の不静定問題

6.1 組み合わせ部材

6.1.1 複合材料の用語がある

コンクリートは、接着剤の機能で使うセメントペーストに、砂利と砂とを混ぜた複合材料の性格があります。この他に、種々の混ぜ物を加えて、コンクリートの性質を改良する工夫がされます。練り混ぜのときに加える液状の物は混和剤、微細骨材の物は混和材と用語を使い分けています。コンクリートの引張り強度の改善には、短めで細い繊維状の鋼材またはガラス繊維を混ぜることも行われ、繊維補強コンクリート (fiber reinforced concrete) と言います。骨材の種類は、細骨材扱いです。航空機体程度までの寸法の構造に使う材料として、「炭素繊維強化プラスチック (Carbon-Fiber Reinforced Plastic)」があります。こちらは、比較的長さの長い炭素繊維を使います。通称で言うベニヤ板は、合板 (plywood) が正式の名称です。建築材料や家具などに使われますが、力を伝える構造用材料の主材には使いません。これらは、材料としてみると、**複合材料** (composite material) と言います。多くの場合、単一材料と同じように、工場で作られた標準部材として製作されます。複合材料と言うときは、強度を持たせる目的の材料と、それを結合させる接着材料で構成します。普通、接着材側の方が強度的には劣ります。材料力学の課題は、材料強度に期待する合理的な使い方の研究です。コンクリートは砂利が強度を担う主材料です。セメントペーストの方が強度的に劣るので、全体を均質な材料として扱うときの力学的な課題が材料力学の研究対象です。

6.1.2 種類違いの材料を組み合わせる

構造部材は、一つの方法種類だけから形状を形成するだけでなく、種類の違う材料の組み合わせも実用されます。コンクリートは、種々の鋼材と組み合わせ、材料の特徴を生かす工夫がされます。鉄筋コンクリート部材がそうです。この鉄筋の使い方では、プレストレストコンクリートのように、鋼材の種類違いを使い分けし、施工の方法にも工夫があります。もう少し大きな部材は、鋼桁とコンクリート床版との**合成桁** (composite girder) があります。PC桁を先に架設しておいて、後から施工するコンクリート床版との合成桁もあります。一方、**ハイブリッド**は、生物の交雑種として使う英語の hybrid からきた用語ですが、あらゆる場面で使われるようになりました。鋼構造物では、材質の異なる鋼材を組み合わせた場合にこの用語を使うことがあります。応力が大きくなる個所の部材は、断面寸法を大きくして対応するのが普通です。それを、同じ断面寸法の、強度の高い別種の鋼材を使い、普通鋼材部材と混用するときと言います。平行弦のトラス橋の製作に軸力が大きい個所に使われたのが始めです。プレートガーダーでは、ウェブ部分を普通鋼材とし、フランジ部分を高張力鋼にすると、全体を高張力鋼で製作した場合と、強度が殆ど変わらないことが実験的に確かめられています。しかし、種類違いの鋼材であっても、見掛けで区別が付きませんので、ハイブリッドの用語はあまり一般化していません。

6.1.3 構造物は部材を単位として組み合わせる

部材の構成材料が何であるかを考えないで (捨象して)、柱、梁などの組み合わせた構造の、力学的な性質を扱うことが構造力学です。材料力学との境界が曖昧になることがあるのは大目に見ます。トラスをマクロに見て、均質な桁として扱うのがそうですし、逆に、連続した二次元の板を FEM では網目構造の骨組みでモデル化する、などがあります。図 6.1 は、二つの梁を上下に重ね合わせて使う場合の力学モデルとして、重ね梁と合成梁とを示したものです。この中間として、下の合成梁のズレ止めに弾力的なバネ作用を考える力学系も解析されたことがあります。しかし、設計に応用するとしても、理論式が面倒であることと、それだけの努力をしても、合理的で経済的な部材設計の提案に繋がらないことも、理論解析の結果から分かりました。

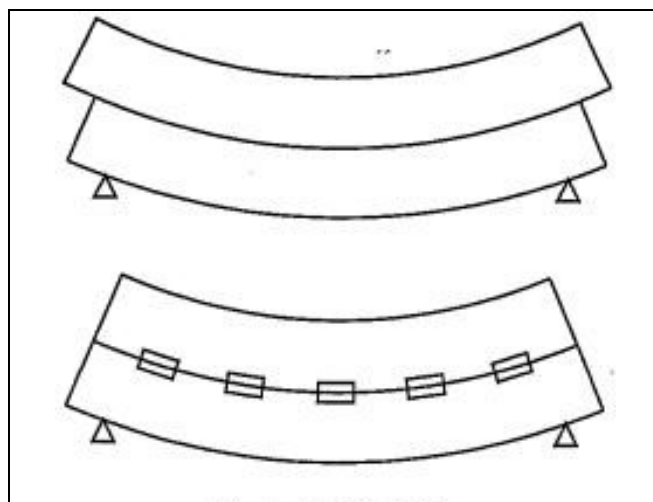


図 6.1 重ね梁 (上) と合成梁 (下)

6.2 柱断面の核

6.2.1 曲げと圧縮を受ける梁を解く

圧縮力を受ける柱は、圧縮力の作用位置が、必ずしも断面の重心（芯）を通るとは限りません。重心からのズレ（偏心距離）が柱断面に曲げモーメントを作用させます。ズレが大きくなければ、柱全断面が圧縮応力度の場になります。しかし、ズレが大きくなると引張応力度が荷重の作用位置と反対側に出るようになります。この解析を、まず、軸力とその偏心で生じる曲げモーメントを受ける矩形断面の梁として扱います（図 6.1）。矩形断面の重心を通る縦軸に沿って軸力の作用位置 e を移動させると、縁応力度な下の式(6.1)で得られます。

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{Pe}{W} = \left(1 \pm \frac{6e}{h}\right) \frac{P}{bh^2} \quad \dots(6.1)$$

この式から、縁応力度に引張応力度が出ない条件は、高さの中央から $\pm h/6$ の範囲であることが分かります。この範囲の幅は、梁の高さの $1/3$ です。向きを縦横変えると、幅の $1/3$ が圧縮応力度の出ない範囲です。この二つの条件から、矩形断面の中央で、菱形の範囲に荷重が作用すれば、断面のどこにも引張応力度が出ません。この図形範囲を **断面の核** (core) と言います（図 6.4 参照）。

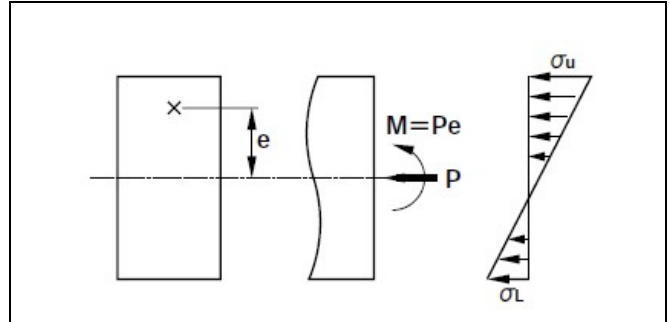


図 6.2 軸力と曲げモーメントを受ける梁

6.2.2 バネで支えられた梁と同質の問題

図 6.3 は、橋台が地盤で支えられる状態を模式的に示したものです。地盤に弾性的な性質があって、支圧の反力をバネ作用で持つと仮定します。さらに、引張応力度には抵抗しないと仮定すると、橋台全体の合力が橋台底辺幅の $1/3$ より外側を通ると、橋台の一部が浮き上がることになります。この力学モデルは、図 6.2 を 90 度左に回転させた状態になることが分かります。異なることは、引張応力度が働かないことです。この橋台を等間隔に並べた杭基礎で持たせるとしたモデルは、第 1 章、1.3 節、[図 1.7](#) のバネ支承で支えられた梁と同質の問題であることを理解して下さい。図 1.7 の場合は、「十分に大きな曲げ剛性を持った梁が、有限個のバネで支えられた力学モデル」ですが、この解析は、有限個数の柱を束ねて梁として使うことになっています。梁として、曲げに対して平面保持の仮定を適用することを宣言することが、上の文の「十分に大きな曲げ剛性の梁…」です。梁の曲げ変形も考える場合は、構造力学の課題として研究されますので、ここでは説明を省きます。

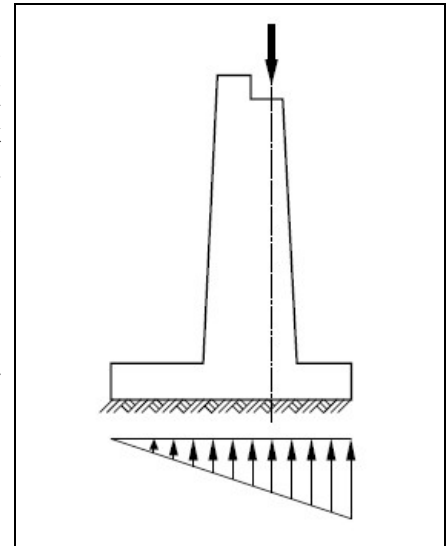


図 6.3 橋台の反力分布

6.2.3 パイプ断面は核の範囲が広がる

図 6.4 は、断面図形が正方形と円、それぞれ充実断面と薄肉パイプ断面の核を図示したものです。円形のパイプは、円内に圧縮力の作用点があれば、どこにも引張応力度がでません。正方形のパイプはそれに次ぎます。4 脚の椅子のように隅に断面を集中させる構造は、核が四角形全断面になります。椅子の端に座っても転倒しません。

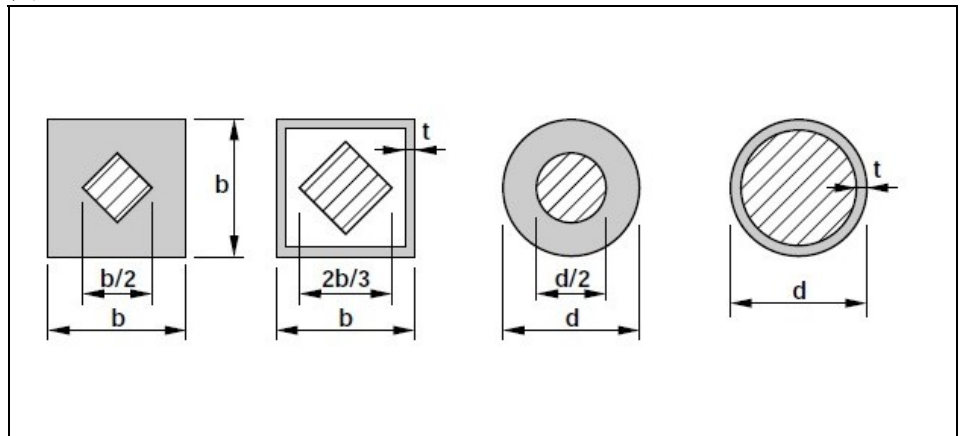


図 6.4 基本図形の核

6.3 鉄筋コンクリート梁の計算

6.3.1 コンクリート部材の積み木モデル

玩具の積み木を高さ方向に積み上げると、案外不安定な構造の柱になることに気が付きます。積み木で構成する柱は、接触面で引張力が作用しません。面の接触が不均一で、柱として鉛直性からずれる変形があると、力を伝える面が偏り、力の作用軸が接触面を外れる個所が起き、そこで倒壊が始まります。ダルマ落とし (図 6.5) は、高さが低い円柱を重ねます。図 6.4 で見るように、核の幅が矩形断面よりも相対的に広がっている分、ズレの許容が大きくなります。面の繋ぎに、曲げに抵抗できるようにするには、別の材料を挟んで引張力が発生する個所を補強するアイデアを使います。そうすると、積み木では玩具の使い方ができなくなります。鉄筋コンクリートの梁も、考え方の基本は同じです。コンクリートは、幾らかの引張強さを持ちますので、鉄筋を使わなくても、梁として使える曲げモーメントの範囲があります。積み木を積み上げるような状態を想定して、引張に抵抗する材料に鉄筋を使うことが、鉄筋コンクリート梁の計算の考え方です。



図 6.5 ダルマ落とし (カタログから採図)

6.3.2 曲げと圧縮を受ける梁として解く

コンクリート構造物は、コンクリートにひび割れ (亀裂) が生じないように設計し施工します。亀裂の発生を抑えるために、コンクリート部材の応力度は、実用状態では引張強度の範囲内に抑える設計をします。亀裂が見られる構造物は、理由が何であれ、常識的に言えば欠陥設計か欠陥施工です。引張応力度は、主に、梁として曲げモーメントが作用するときですので、安全を確保するため、梁としての最大抵抗モーメントを見積もる必要があります。この大きさは、できれば実物での破壊試験で求めるのが理想です。しかし、応用の利く条件での実験データを元に、それを説明する力学モデルを考えて、設計計算に応用します。このモデルは、実験事実を正確に説明する科学的な態度からは幾らか妥協した、技術計算に便利な力学モデルが提案されます。鉄筋コンクリート梁の設計計算に使われるモデルは、コンクリートブロックを積み木のように重ねたモデルを想定します。コンクリートの引張強度の寄与を無視し、圧縮場のコンクリートは応力と歪みが比例するとした、圧縮と引張との弾性率が異なる非線形の弾性体であると仮定します。曲げで生じる引張応力を分担するために鉄筋を使います。それも、矩形断面の片側に寄せます。これが単鉄筋コンクリート梁の発想です。これから先は、数学的な解析法の理論と数値計算技術の問題です。コンクリートの弾性的な性質が数学的には非線形ですので、一意の代数式で断面計算ができません。このことが、鉄筋コンクリートの計算を面倒にしている理由の一つです。この節は、初心者教育のことを考えて、非線形弾性体の計算が複雑になって行く例題を解説します。

6.3.3 偏心軸力を受ける圧縮柱の計算

鉄筋コンクリート柱の応力度を計算するとき、断面の核の範囲に軸力が作用すればコンクリートに圧縮応力度が出ません。この場合には鉄筋も圧縮応力度になります。核の範囲を広くするには、鉄筋を断面の周りに片寄せて、断面の効率を上げます。核の範囲を求める計算は、線形弾性体の仮定を使い、断面の縁で、式(6.1)を応用して応力度が 0 になる条件で求めます。核の外側に軸力の作用点があると、線形弾性の仮定ではコンクリートに引張応力度が出ますので、これを無視する計算に切り替えます。鉄筋の配置を、図 6.6 のように、鉄筋を矩形断面の下側だけに入れば (梁では単鉄筋矩形梁です)、鉄筋は引張り応力度になり、コンクリートの応力度が 0 になる (中立軸の) 位置が上縁から x の位置になるとします。この x を未知数として計算することが、偏心軸力を受ける圧縮柱の計算課題です。これは、 x の三次式を解くことになり、数値計算が面倒です。以下の項では、具体的な数値を使う計算手順を説明します。この計算例題は、断面諸元が与えられて応力度の計算をします。設計計算では、許容応力度を満たすような断面諸元を求めるのですが、普通は、断面を仮定して応力度を求め、それをみて断面を変更する試行錯誤が行われます。

演習例題 6.1

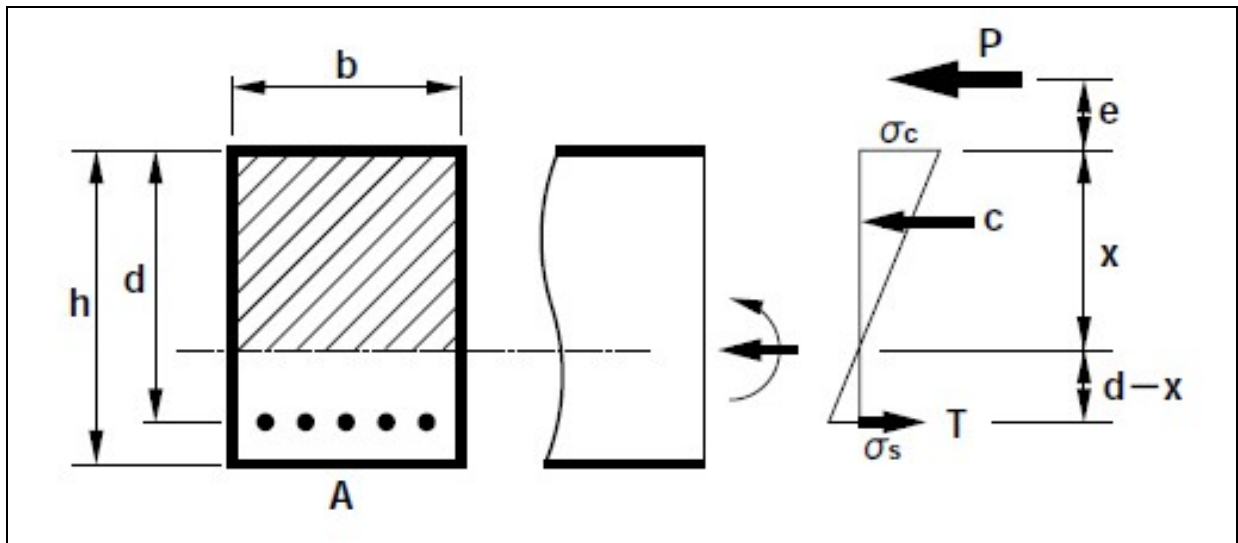


図 6.6 例題計算に使う矩形断面と記号

(1) 記号の約束

鉄筋コンクリート部材の計算では、多くの種類の英字記号が使われます。使い方に慣用が定まっているものは、特に説明がないこともあります。コンクリート関係の参考書は、記号の意味と、用語の定義をまとめたページを設けることが見られます。参考書ごとに、記号、座標系、また正負の約束などに違いがありますので、提案されている式を使うときに注意が必要です。ここでは、図 6.6 に使われる記号について説明します。慣用がありますが、念のため常識の確認も兼ねて解説します。

- ・ 特に断らなければ、記号は正の数を表します。計算書などの技術文書に使うとき、数式の計算結果が負の数になるときは、説明を補って正の数で書くのが丁寧です。
- ・ 数値は、できるだけ整数を使います。桁数が多くなる数値は、単位系を変えて使うことがあります。
- ・ 寸法数値は負の数を使いません。結果的に図 6.6 の高さ方向の座標は、原点を矩形断面の上縁において、下向きに測る約束になります。
- ・ 図 6.6 では、外力 P の作用位置が偏る量を表す記号 e の符号は、式の上では負の数で扱うことになります。これが元で、数値計算のときに混乱することがあります。
- ・ 応力（力、モーメント）、応力度も、実用は、向きを決めて正の数で扱います。したがって、コンクリートの応力度も、圧縮応力度と断って、正の数で表します。力の向きを示す矢印は、数値の正の向きを示します。
- ・ 寸法記号は英小文字を使います。記号は次の約束が慣用です；
 - h : 桁高さ height の意味です。
 - d : 有効高さ effective depth が元の意味です。
 - x : 断面上縁から中立軸までの距離です。数学記号の未知数の意義です。
(x, y)座標系の意義の x 座標でないことに注意します。
- ・ 応力度の記号は、ギリシャ文字 σ 、 τ を使うのが材料力学の慣習です。設計示方書では、アメリカでの慣習を取り込んで、 f も併用されています。
- ・ コンクリートは、圧縮応力度として使うことが標準ですので、応力度を σ_c と書くときは正の数値で扱います。そうすると、引張応力度の検証が必要になるときに負の数値で表すこととなりますので、説明を補う注意が必要です。
- ・ 鉄筋は、引張応力度になるように使うのが標準です。しかしコンクリートの圧縮応力度の場合では、これも圧縮応力度になって負の数になるので、圧縮鉄筋のように言葉を補う注意が必要です。
- ・ なお、図 6.6 には書いてありませんが、計算式には慣用として下の記号も使います；
 - n : 鋼のヤング率 / コンクリートのヤング率の比です。
 - p : 鉄筋断面積の比、 $A / (b \times d)$ です。 h ではなく d を使うことに注意します

(2) 一般寸法

計算例題に使う数値は下のようによ決めます。

$$b = 50\text{cm}, h = 45\text{cm}, d = 40\text{cm}, A = 22.8\text{cm}^2 (6-\phi 22\text{mm}), n = 15$$

(3) 核の位置の計算

コンクリート全断面を有効として、断面二次モーメントを求めます。これより、式(6.1)を利用して、断面の上縁と下縁とで $\sigma = 0$ になる軸力の作用位置を求めます。代数式を紹介してから数値計算をするのが普通の方法ですが、ここでは、表計算ソフト(例えばMS-EXCEL)を利用する環境を考えて、実務的に表の形にまとめました。このようにしておくと、圧縮側の鉄筋断面を考える場合や、T形断面などの特別な断面形の計算にも応用が利きます。

表 6.1 コンクリート全断面を有効としたときの断面定数

断面	寸法		断面積	縦距	一次モーメント	二次モーメント	
	b	h				$n \times A$	$A y^2$
コンクリート	50	45	2250	0	0	0	379688
鉄筋	6- $\phi 22$		342	17.5	5985	104738	0
	$\Sigma A =$		2592	$\Sigma Q =$	5985	484426	
重心位置 $\eta = 5985/2592 = 2.31\text{cm}$ 、						$Q \times \eta =$	
重心軸に関する断面二次モーメント =						13825	
						470601	
$y_U = - (h/2) - \eta = -22.5 - 2.31 = -24.81\text{cm}$						$W_U = -18968 \text{ cm}^3$	
$y_L = + (h/2) - \eta = 22.5 - 2.31 = 20.19\text{cm}$						$W_L = 23309 \text{ cm}^3$	

下核点 = $W_U / A = -18968/2592 = -7.32\text{cm}$; 上縁からの距離 = $22.5 + 2.31 + 7.32 = 32.13\text{cm}$

上核点 = $W_L / A = 23309/2592 = 8.99\text{cm}$; 上縁からの距離 = $22.5 + 2.31 - 8.99 = 15.82\text{cm}$

(4) 単鉄筋矩形梁としての計算

曲げモーメントだけが作用するときの条件は、軸力の大きさを小さくして作用位置を断面の上縁から高い位置で考えた極値の状態と考えることができます。中立軸の位置 x を求める計算は、二次式を解きます。表 6.1 と同じ形で計算手順を説明します。

表 6.2 曲げを受ける断面としての中立軸の位置 x の計算

断面	寸法		断面積	縦距	一次モーメント
	b	?			
コンクリート	50	x	$50x$	$-x/2$	$-25x^2$
鉄筋	6- $\phi 22$		342	$d - x$	$342(40 - x)$
				$\Sigma Q =$	0
x の二次方程式; $Q = 0$ の条件より、					$25x^2 + 342x - 13680 = 0$
$x = \{ -342 + \text{sqr}(342 \times 342 + 4 \times 25 \times 13680) \} / (2 \times 25) = 17.53\text{cm}$					

表 6.3 曲げを受ける断面としての断面定数

断面	寸法		断面積	縦距	一次モーメント	二次モーメント	
	b	x				$n \times A$	y
コンクリート	50	17.53	877	-8.77	-7691	0	22446
鉄筋	6- $\phi 22$		342	22.47	7685	172676	0
	$\Sigma A =$		2592	$\Sigma Q =$	~0	195122	
コンクリート上縁の断面係数 = $J / y = 195122/17.53$						$W_C = 11131 \text{ cm}^3$	
引張鉄筋の断面係数 = $(J / y) / n = (195122/22.47) / 15$						$W_S = 579 \text{ cm}^3$	

この断面係数の計算は、二通りの利用方法があります。第一は、コンクリートまたは鉄筋の許容応力度を決めて、抵抗モーメントの大きさを求めることです。第二は、設計モーメントが与えられて、コンクリートと鉄筋の応力度を検証することです。例題断面で、設計モーメントが $M = 5 \text{ tf}\cdot\text{m}$ であるときの応力度の計算を示します;

$$\sigma_c = 500000 / 11131 = 45 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_s = 500000 / 579 = 868 \text{ kgf/cm}^2$$

(5) 偏心軸力を受ける柱としての計算

この計算をするときは、軸力の作用位置が大体決まっていることが必要条件です。予備的な知識として、核の位置がどこにあるかを、前もって当たっておきます。実は、(1)で計算した核は、断面の高さを h で考えましたので、下縁でコンクリートの応力度が 0 になっていても、鉄筋に幾らかの圧縮応力度が作用します。鉄筋が入っている個所でコンクリートの応力度が 0 になる条件ならば、核の位置は上縁から d の $1/3$ である 13.3cm 下になります。この位置から上に軸力が作用すると、鉄筋に引張応力度が生じます。つまり、図 6.6 では $e < 13.3\text{cm}$ の条件での解を計算します。

表 6.4 軸力 P との釣合条件

軸方向力分	断面	寸法		断面積
		b	?	
$b x \sigma_c / 2$	コンクリート	50	x	$50 x$
$-n A \sigma_c (d - x) / x$	鉄筋	6- ϕ 22		342
P				
釣合条件: $\Sigma = 0$	$(P / \sigma_c) = 25 x - 342(40 - x) / x$			

表 6.5 モーメント分 $P e$ との釣合条件

モーメント分	断面	寸法		断面積	鉄筋位置からの縦距
		b	?		
$(b x / 2) \sigma_c (d - x / 3)$	コンクリート	50	x	$50 x$	$d - x / 3$
0	鉄筋	6- ϕ 22		342	0
$P (d - e)$					$d - e$
釣合条件: $\Sigma = 0$	$(P / \sigma_c) (40 - e) = 1000 x - (50/6) x^2$				

軸方向力と曲げモーメントの条件より (P / σ_c) を消去して x の 3 次式を求めます。

$$(50/6) x^3 + \{25(40 - e) - 1000\} x^2 + 342(40 - e) x - 13680(40 - e) = 0$$

計算例題として、ここでは軸力 P の作用位置 e を 0 とします。

$$8.3333 x^3 + 13680 x - 547200 = 0$$

x の 3 次式を代数的に解く方法にはカルダノの式があります。理論式としての価値はありますが、数値計算手順が面倒です。ここでは、典型的な計算技術であるニュートン・ラプソン法による反復法で求めます (説明は省きます)。手計算に使うと、計算手間が格段に少なくなります。

$$F = x^3 + 1642 x - 65664 = 0, \quad F' = 3 x^2 + 1642, \quad \Delta x = -F / F'$$

初期値 $x = 20$ で始めます。

一回目: $F = 8000 + 32840 - 65664 = -24824, \quad F' = 1200 + 1642 = 2842, \quad x = 20 + 8.5 = 28.5$

二回目: $F = 23149 + 46797 - 65664 = 4282, \quad F' = 2437 + 1642 = 4079, \quad x = 28.5 - 1.05 = 27.45$

三回目: $F = 20684 + 45073 - 65664 = 93, \quad F' = 2261 + 1642 = 3903, \quad x = 27.45 - 0.02 = \underline{27.43}$

.....

表 6.4 の軸力分の釣合式より

$$(P / \sigma_c) = 25 x - 342(40 - x) / x = 685.75 - 148.48 = 537.27$$

$$\sigma_c = P / 537.3$$

$$\sigma_s = n \sigma_c (d - x) / x = P / 78.2$$

計算例として、 $P = 30 \text{ tf}$ の軸力を受ける場合の解: $\sigma_c = 56 \text{ kgf/cm}^2, \sigma_s = 384 \text{ kgf/cm}^2$

(6) 他の断面形状に応用するとき

単鉄筋矩形梁は、最も基本的な鉄筋コンクリート断面ですので、その代数計算式は多くの参考書で見ることができます。少し複雑になると、代数式の提案がないか、複雑になりますので、ここで紹介したように表計算で作業をする方が勝ります。コンクリート梁に関する具体的な計算式の説明は、下記の URL を参照して下さい。

「易しくないコンクリート工学」5. 矩形断面部材の計算法

<https://www.e-bridge.jp/eb/tcontents/yasasikunai-concrete/top.html>

6.4 二次元弾性体の解析問題

6.4.1 不静定の力学問題として捉える

理論的に扱う弾性体は、均質な連続体を仮定し、微分レベルでの力の釣合と変形条件を考慮して解析します。部材内部の応力度と歪みの関係を求めたいとしても、実用になる厳密解が数学的に得られる条件は限られています。一定断面の柱や梁の応力度と歪みを解析するときは、長手方向に一次元の座標系を考慮して、断面の平面保持の仮定を使った、最も単純化した力学モデルで扱います。しかし、二次元的な形状を扱う二次元弾性体となると、理論的な扱いが難しくなります。例えば矩形断面の単純桁は、桁の厚みがありますので、支間が短いと、曲げ部材としての仮定は現実的ではなくなります。コンピュータが便利に利用できるようになって、任意の条件のときであっても、定性的に近似解が必要であるときは、有限要素法(FEM: Finite Element Method)を使うことができるようになりました。これは、連続体である弾性体を骨組み構造に置き換えて扱いますが、非常に不静定次数が大きい構造系になります。このことを意味するように、この章の標題に不静定問題と書きました。連続体として微分方程式を解析に直接使う場面は、多くないと言えるでしょう。部材の設計法を吟味するとき、二次元弾性体の解析が必要となる代表的な場面は、支圧(bearing)です。これは、弾性体の表面(境界)で外力が狭い範囲で作用する個所です。物理的に外力を考えると、その全体をまとめて矢印を描き、ベクトルの扱いをします。実際に力が作用するのは、錐の先のような尖った物が当たるのではなく、面に分布する力です。或る狭い個所に作用するとき、局部的に大きな応力度と歪みが出ますので、その実態を見積る必要があります。幾つかの問題を以下の項で紹介します。ただし、お話しだけで済ませ、具体的な数式などは省きました。

6.4.2 地盤の支持問題

軟らかな地盤に重量の大きな構造物を載せる場合、土質力学で、半無限の弾性体に等分布荷重が作用するモデルを扱います(図6.7)。数学的に扱うとき、錐の先のような集中荷重の直下は特異点です。分布荷重の場合も、荷重の縁が特異点になります。実際現象として、荷重の作用は、接触面に局部的な凹みや押し抜き剪断破壊を起こすことがあります。支圧の作用面の面積を大きくして実効の支圧応力を下げたために、幾つかの工夫があります。砂利や砂は、ピラミッドのように傾斜を持った角度で積み上げることができます。弾性的な性質はありませんが、見方を変えると、上に載る荷重を広げて下に分布させて力を伝えていきます。鉄道の砂利道床は、大きな集中荷重を広い面積に分布させて、その下の路盤に伝えます。道路では走行性をよくするために舗装しますが、床版の構造設計では荷重分布を広くする目的があります。道路橋の鉄筋コンクリート床版に自動車のタイヤからの重量を持たせるとき、タイヤの設置幅と設置長を、舗装厚分だけ45度の角度で裾を広げた面積に分布する、等分布荷重とします。一方、地盤側では、或る深さの個所に水道管などの埋設物があるとき、深さ方向の応力度分布の見積もりが必要です。この解析では、ブーシネスク(J. V. Boussinesq, 1842-1929)の理論的研究が参照されています。これによって二つの重要な性質が分かりました。一つは、当然のことながら、深さ方向の圧縮応力度が、支圧応力を減少させて伝わることです。二つ目は、鉛直方向と直角に引張応力度が出ることです。これは、高さの低いコンクリートの柱を圧縮すると、縦に割れることがあることの原因です。

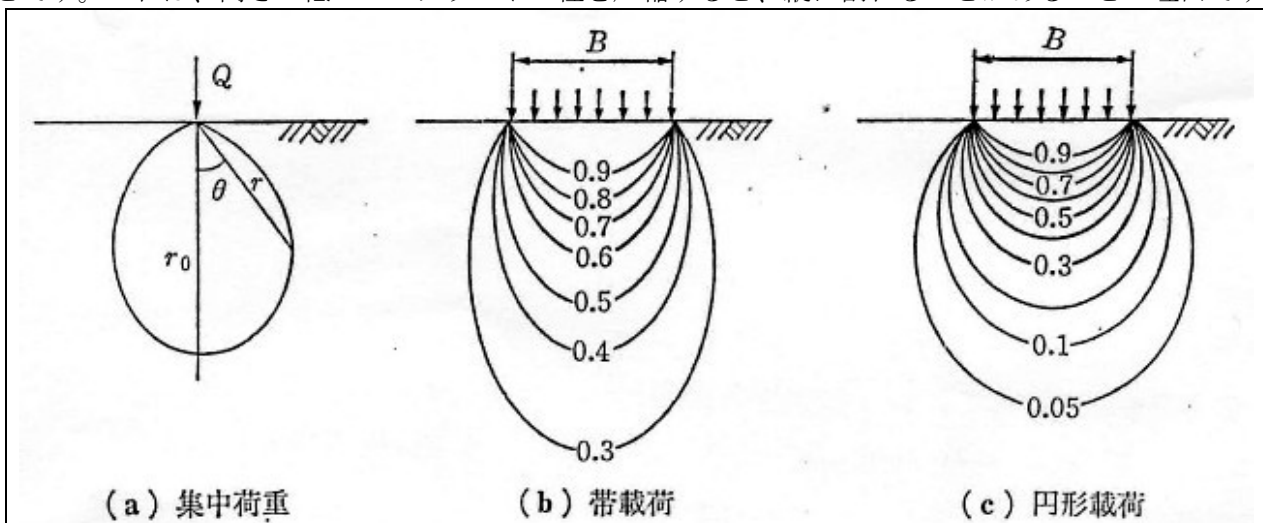


図 6.7 土質力学で扱う圧力球根

6.4.3 橋の支承と橋脚や橋台での支圧

橋の上部構造から伝えられる大きな反力は、二段構えで地盤に伝えます。まず、鋼製の支承を介してコンクリートの橋脚または橋台に伝えます。コンクリート側の台座の支圧面積が小さいので、普通のコンクリート柱の圧縮許容応力度よりも割り増した支圧の許容応力度で検証します。さらに基礎部分の底面積を広げて地盤に伝えます。この各段階で、支圧応力度の検証が必要になります。このうち、支承にはピンやローラーが使われますので、ここでヘルツ(H. R. Hertz, 1857-1894)の接触応力度を検証します。なお、ロッカー支承とは、円柱状ローラーの回転角度が小さい場合、左右を削って、幅を狭くした形です。鉄筋コンクリート橋の可動支点には、同じく鉄筋コンクリートでロッカー形状に製作し、その上下の円柱面と受圧面に鋼材を使う構造を採用する例があります。

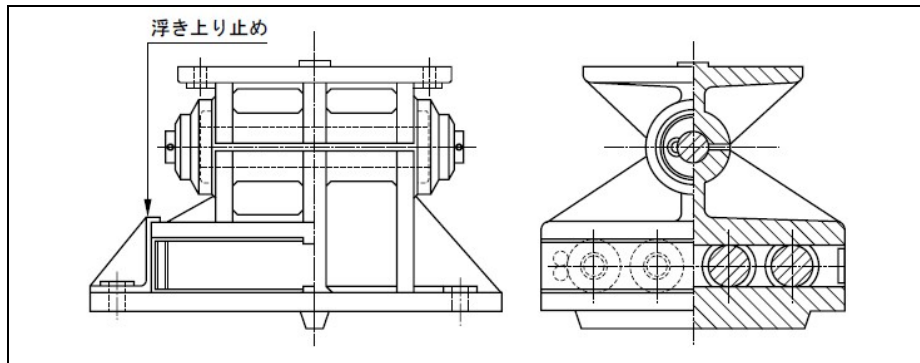


図 6.8 標準的なピンとローラーを持った可動支承

6.4.4 ヘルツの接触応力度

大きな反力を受け、かつ安全に移動ができる機械構造には、ボールベアリングやローラーベアリングを使います。幾何学的に見れば、円と直線の接触は一点です。力学的には接触部分が相互に弾性的な変形をした狭い幅(面積)で接します。この幅は、作用する荷重の大きさで変化します。これを解析的に求めたヘルツの名前をつけた公式があります。参考のため、表 6.6 と表 6.7 に挙げておきます。ベアリング用の鋼材は、特に強度の高い材料を使います。接触部分に熱処理をすることもありますし、特殊鋼を溶着する例もあります。鉄筋コンクリート製のロッカーでは、接触面に鋼材を使います。

6.4.5 コンクリートの引張さ試験

ローラベアリングの力学モデルを考えて、鋼製の円柱を横置きにして圧縮力を伝える実験をすることを考えて下さい。荷重が大きくなると支圧面が増え、或る限度を超えれば全体として横方向に膨らむ塑性変形をします。しかし、脆性材料であるコンクリートでは、圧縮試験に使う円柱供試体を横置きにして圧縮荷重を作用させると、横方向に膨らむ塑性的な変形の余裕が無く、潰れるのではなく、縦に破断します(図 6.9)。コンクリートの実用的な引張強さの試験方法は、この実験事実をもとに、赤沢常雄が 1943 年に提案した方法です。引張強さは、次の式で計算します。

$$\sigma' = \frac{2P}{\pi dl} \quad \dots(6.2)$$

なぜ縦の面で破断が起こるかの理論的な根拠は、第 6.4.2 項の最後の方で説明した性質にあります。局部的に圧縮力を受ける弾性体は、深さ方向と直角な方向に引張応力度の場が出るからです。

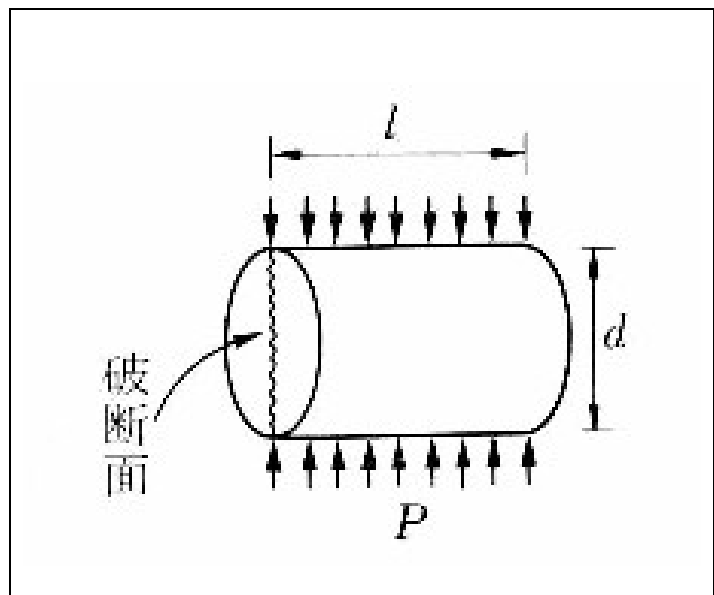
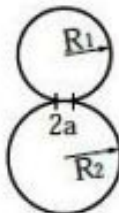

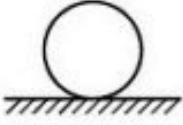



図 6.9 コンクリートの引張強さ試験法

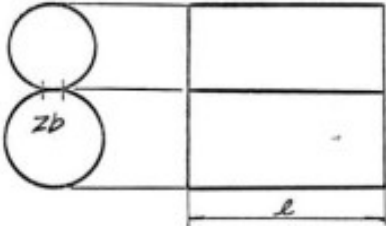

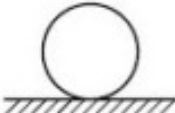

表 6.6 ヘルツの接触 (球面)

<p>球面と球面との接触</p> 	<p>E_1, ν_1</p> <p>E_2, ν_2</p>	$k_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$ $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{P(k_1+k_2)R_1R_2}{R_1+R_2}}$ $\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi \alpha^2}$
	<p>$E_1 = E_2 = E$</p> <p>$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$</p>	$\alpha = 1.109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$ $\sigma_{\max} = 0.388 \cdot \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_1+R_2)^2}{R_1^2+R_2^2}}$
	<p>$R_2 \quad \nu = 0.3$</p> <p>$R_1 = \infty$</p>	$\alpha = 1.109 \cdot \sqrt[3]{\frac{PR_2}{E}}$ $\sigma_{\max} = 0.388 \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_2^2}}$
	<p>$R_1 > R_2 \quad \nu = 0.3$</p>	$\alpha = 1.109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1-R_2}}$ $\sigma_{\max} = 0.388 \cdot \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{R_1R_2}{R_1-R_2}\right)^2}$
<p>設計実用式</p>		$P = 3.88 \times 10^{-13} \cdot \sigma_s^3 \left(\frac{R_1R_2}{R_1-R_2}\right)^2$ <p>$\sigma_s = 6000 \text{ kgf/cm}^2$ の場合</p> $P = 0.84 \left(\frac{R_1R_2}{R_1-R_2}\right)^2 \text{ kgf}, \quad R: \text{cm}$

6.4.6 桁断面に作用する支圧の問題

曲げを受けるとして設計する橋桁は、自動車の輪荷重を集中荷重として設計計算に使います。実際には、或る幅を持った分布荷重になるような構造を考えて、間接荷重で作用させます。トラス橋では、弦材は格点間を結ぶ部材であって、荷重は床組みなどを介して格点に作用させる計算をします。影響線の計算では、間接荷重の載荷方法を考えますので、影響線は格点位置での影響値を結んだ多角形を描きます。桁橋では、輪荷重がやや直接載る構造もあります。鋼床版を使う箱桁構造では、舗装が荷重分配に大きな影響を持ちます。また、桁断面が局部的に潰れないように、補剛材の配置を考えます。橋桁の架設に送り出し工法を採用するとき、橋桁を下から仮に支える個所を不注意に設定すると、局部的な溶接部の破壊や座屈変形を起こすことがあります。コンクリートの桁橋でも同じ注意が必要です。支点の個所は、支承金具などから上向きの支圧が働く個所ですので、この部分は圧縮を受ける柱の構造として圧縮の方の許容応力度で検証します。

表 6.7 ヘルツの接触 (円柱面)

<p>円柱と円柱との接触</p> 	E_1, ν_1 E_2, ν_2	$k_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$ $b = \sqrt{\frac{4P}{l} \cdot \frac{(k_1 + k_2) R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$ $\sigma_{\max} = \frac{2P}{\pi b l}$
	$E_1 = E_2 = E$ $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$	$b = 1.52 \sqrt{\frac{P}{E l} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$ $\sigma_{\max} = 0.418 \cdot \sqrt{\frac{P E}{l} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$
	$R_2 \quad \nu = 0.3$ $R_1 = \infty$	$b = 1.52 \cdot \sqrt{\frac{P R}{E l}}$ $\sigma_{\max} = 0.418 \cdot \sqrt{\frac{P E}{l R}}$
	$R_1 > R_2 \quad \nu = 0.3$	$b = 1.52 \sqrt{\frac{P}{E l} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}}$ $\sigma_{\max} = 0.418 \cdot \sqrt{\frac{P E}{l} \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}}$
<p>設計実用式</p>		$P = 2.73 \times 10^{-4} \cdot \sigma_c^2 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ $\sigma_c = 6000 \text{ kgf/cm}^2$ の場合 $P = 98 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ kgf}, \quad R: \text{cm}$

7. 梁に作用する剪断応力度

7.1 剪断応力度分布のメカニズム

7.1.1 剪断を受ける矩形断面の梁

図 7.1 左に示すように、曲げ部材を、部分的に長さ ΔL で切り出して力の釣り合いを考えます。上下縁の断面を増やした構造ですが、腹部に注目すれば、この部分は矩形断面の梁と同じ性質があって、剪断応力を伝える目的を持ちます。この部分の応力度は、曲げモーメントによる梁の長手方向の応力度と剪断応力度とが作用していて、第 3 章で説明した二次元弾性体の応力と変形の関係が成り立っています。手前の垂直な切断面には剪断応力度が作用しますが、その大きさの分布を求めたい、と言うのがこの 7.1 節での問題です。 ΔL 部分の切断面の両側では、外力として考える曲げモーメント M と剪断力 S が作用しているとします。さらに、腹部を水平な面で切断し、下側の部材片について、断面に作用する応力を考えます (図 7.1b)。梁に剪断力 S が作用していれば、梁の曲げモーメント M は、梁の長手方向に変化します。図 7.1a に示すように梁の曲げモーメントと剪断力の符号の約束を決めると、曲げモーメントは手前から向こう側に向かって $\Delta M = S \times \Delta L$ 増加します。これによって、軸方向の応力度は長手方向に変化します。図 7.1b の部材片では、軸方向の応力度の合力を計算すると、手前が引張力 P で向こう側が $P + \Delta P$ に増加します。そうであると、腹部の水平切断面に剪断応力度 τ が作用し、 ΔP 分の力と釣り合います。剪断応力度 τ は、垂直な断面と水平な断面とに作用し、その大きさが同じです。向きがどうなるかは、図 7.1 右を見て理解して下さい。

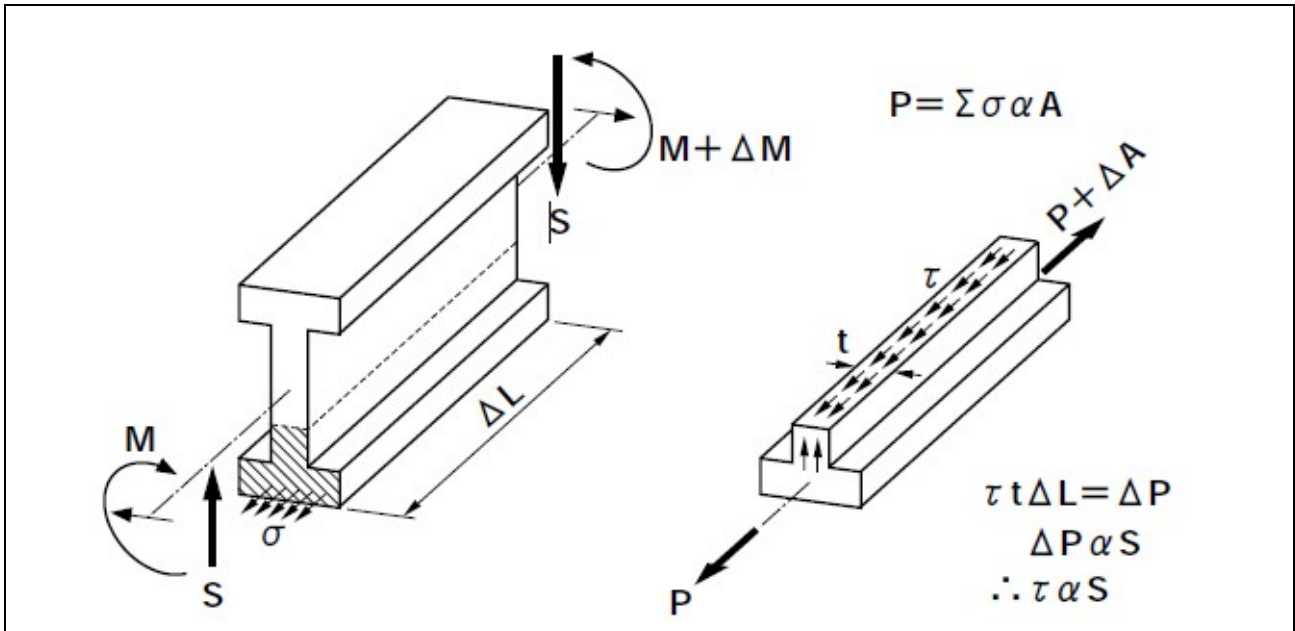


図 7.1 矩形断面の腹部に作用する剪断応力度

7.1.2 剪断応力度の大きさ

図 7.1 に示した剪断応力度 τ の大きさは、腹部の水平切断面の、高さ方向の位置 y によって変わります。座標軸 y の原点を中立軸にすると、 P の大きさは、水平切断面から下の部分断面に作用している垂直応力度の合力です。これは曲げモーメントによる応力度です。部材端の垂直な断面に注目しその部分断面の断面一次モーメント Q (式 4.4 参照) を求めてから、剪断応力度 τ は次のように計算します。

$$P = \frac{Q}{J} M, \quad \therefore \Delta P = \frac{Q}{J} S \Delta L = t \tau \Delta L \quad \dots (7.1)$$

ここで、式 7.1 の右辺に注目して分かる性質は、腹部の幅 t が薄ければ、剪断応力度の大きさ (絶対値) が大きくなることです。断面一次モーメント Q の大きさは、水平切断面の高さが中立軸にあるときに極大です。図 7.1 の梁は、上下でフランジ部分を増やした断面図形です。全体が矩形の梁の場合、垂直断面に作用する剪断応力度の大きさは、中立軸の位置で極大、上下縁で 0 になる放物線です。したがって、剪断応力度の最大値は、中立軸の位置で、断面全体に平均に剪断応力度が分布しているとした値の 1.5 倍です。

7.1.3 剪断流の考え方を理解する

梁の断面形状が、前々項の図 7.1 のように幅と厚みがある場合、設計実務で剪断応力度の分布を近似的に考えるときは、腹部断面全体に剪断応力度が等分布していると仮定します。この理由は、剪断応力度の大きさが、局部的に特に大きくなることはないからです。しかし、鋼の薄板を組み合わせで断面形を構成するときは、剪断応力度の大きさと向きとについて、水路を流れる水流と似た性質があります。これを**剪断流**(shear flow)と言います(ただし、この用語は、流体力学でも使います)。図 7.2 に示す三種類の断面形状について、剪断応力度の分布の計算を、説明の例題として取り上げます。

この三断面は、垂直方向の剪断力を受けるとし、腹板(ウェブ)の寸法を同じにしてあります。断面(a)は、フランジがありませんが、これは厚みのある矩形断面のモデルです。断面(b)と(c)はフランジが付きますが、ウェブの片側と両側に水平に付いています。フランジ部分の剪断応力度の合力は水平方向です。また、ウェブとの接続個所で、剪断流の合流(または分岐)が起こります。計算手順を分かり易くするため、表の形にまとめました。

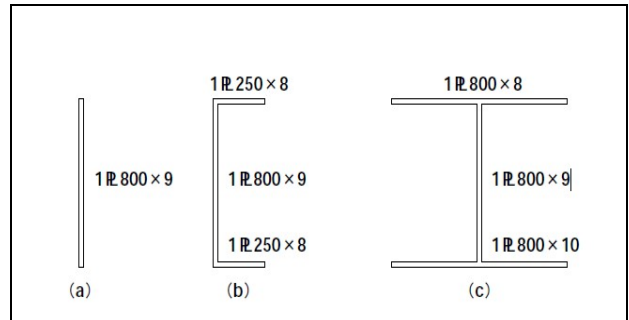


図 7.2

断面(a)

番号	断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント	二次モーメント	二次モーメント
	b×t (cm)	A (cm ²)	y (cm)	Q=Ay (cm ³)	Ay ² (cm ⁴)	J ₀ (cm ⁴)
1-2	0.9×40	36.0	20	720	14400	4800
2-3	0.9×40	36.0	-20	-720	14400	4800
Σ		72.0		0		38400

S=63 tf、(計算を比較するため、剪断力 S は三例題ともに同じです)

番号	断面	断面積	剪断流	板厚	剪断応力度
	ΔQ (cm ³)	Σ ΔQ	q=SQ/J (kgf/cm ²)	t (cm)	τ (kgf/cm ²)
1	0	0	0	0.9	0
2	720	720	1181	0.9	1312
3	-720	0	0	0.9	0

断面(b)

番号	断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント	二次モーメント	二次モーメント
	b×t (cm)	A (cm ²)	y (cm)	Q=Ay (cm ³)	Ay ² (cm ⁴)	J ₀ (cm ⁴)
1-2	25×0.8	20.0	40	800	32000	0
3-4	0.9×40	36.0	20	720	14400	4800
4-5	0.9×40	36.0	-20	-720	14400	4800
6-7	25×0.8	20.0	40	-800	32000	0
Σ		112.0		0		102400

S=63 tf

番号	断面	一次モーメント	剪断流	板厚	剪断応力度
	ΔQ (cm ³)	Σ ΔQ	q=SQ/J (kgf/cm ²)	t (cm)	τ (kgf/cm ²)
1	0	0	0	0.8	0
2	800	800	492	0.8	615
3		800	492	0.9	547
4	720	1520	935	0.9	1039
5	-720	800	492	0.9	547
6		800	492	0.8	615
7	-800	0	0	0.8	0

断面(c)

番号	断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント	二次モーメント	二次モーメント
	$b \times t$ (cm)	A (cm ²)	y (cm)	$Q=Ay$ (cm ³)	Ay^2 (cm ⁴)	J_0 (cm ⁴)
1-2	40×0.8	32.0	40	1280	51200	0
3-4	40×0.8	32.0	40	1280	51200	0
5-6	0.9×40	36.0	20	720	14400	4800
6-7	0.9×40	36.0	-20	-720	14400	4800
8-9	40×0.8	32.0	-40	-1280	51200	0
10-11	40×0.8	32.0	-40	-1280	51200	0
Σ		200.0		0	243200	

$S=63$ tf

番号	断面	一次モーメント	剪断流	板厚	剪断応力度
	ΔQ (cm ³)	$\Sigma \Delta Q$	$q=SQ/J$ (kgf/cm ²)	t (cm)	τ (kgf/cm ²)
1	0	0	0	0.8	0
2	1280	1280	332	0.8	415
3	0	0	0	0.8	0
4	1280	1280	332	0.8	415
5	0	2560	663	0.9	737
6	720	3280	850	0.9	954
7	-720	2560	663	0.9	737
8	0	1280	332	0.8	415
9	-800	0	0	0.8	0
10	0	1280	332	0.8	415
11	-800	0	0	0.8	0

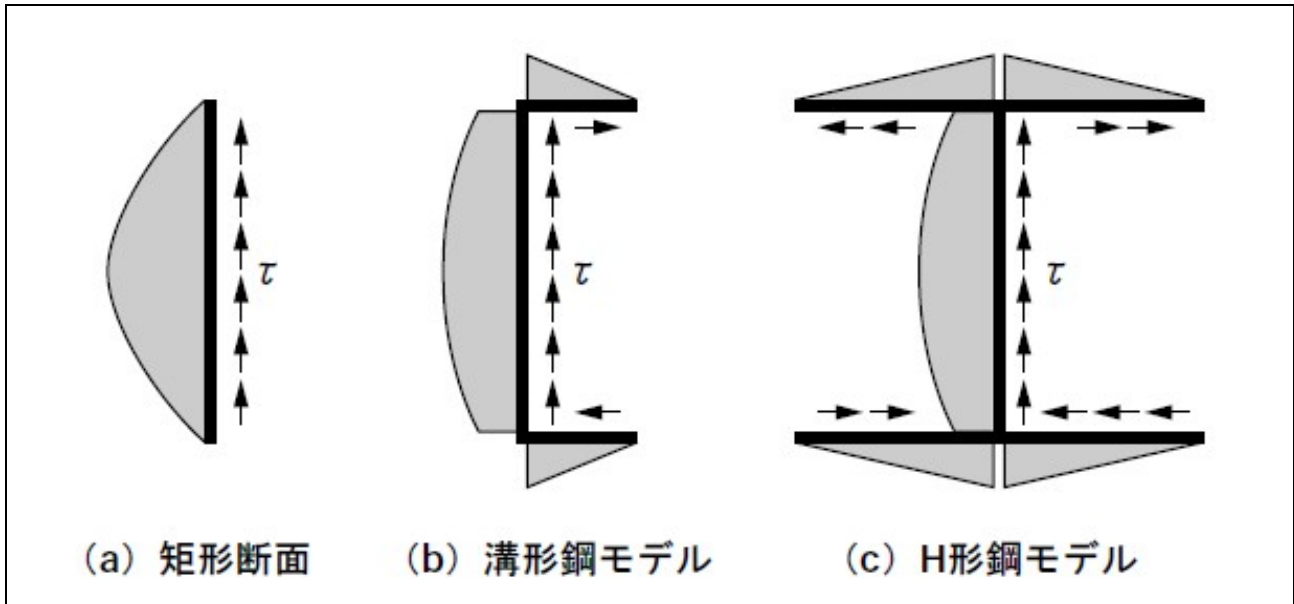


図 7.3 剪断流の図示

解説：

剪断応力度は、板の自由縁で0です。剪断流の大きさは、板幅方向に変化します。フランジ部分は直線分布、ウェブは放物線です。剪断応力度の最大は中立軸の位置で起こります。ウェブに剪断力が等分布すると仮定すると、 $\tau=875$ kgf/cm²です。ウェブの剪断応力度の合力は、ウェブを流れる全流量であって、応力としての剪断力と釣り合います。なお、H形は、溝形鋼を背中合わせに貼り合わせて構成した対称断面と考えることができます。

7.2 剪断応力度を検証する必要がある断面形状

7.2.1 溶接桁フランジ部分

図 7.4 に示す溶接プレートガーダー橋のフランジ部分は、二枚の鋼板が隅肉溶接で繋がっています。この溶接部を通路として、剪断流が流れます。剪断応力度の分布は、細かく見れば複雑ですが、溶接部分が狭い通路になっていますので、この溶接部の剪断応力度が許容剪断応力度を超えないことを検証する必要があります。剪断力は橋桁では支点付近で最大値 150 tf を受けたとした計算例題を示します。なお、隅肉溶接の寸法数値は、脚長（二等辺三角形の一辺の長さ）です。流路としての幅は、脚長の 0.7 倍です。剪断応力度の検証位置は、この溶接部と、腹板の中央、中立軸の位置です。

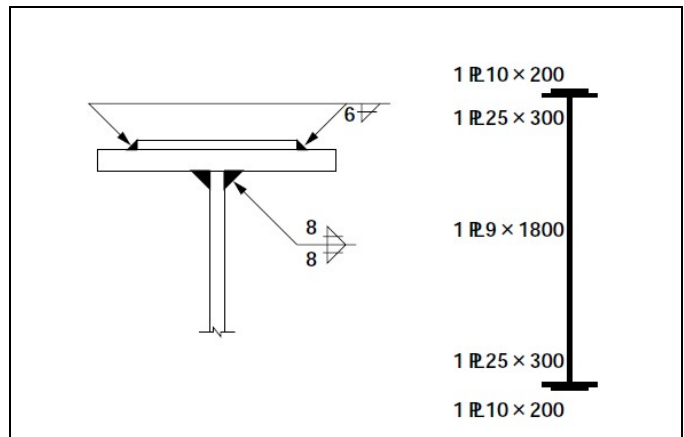


図 7.4

断面定数の計算

断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント	二次モーメント	二次モーメント
	A (cm ²)	y (cm)	Q=Ay (cm ³)	Ay ² (cm ⁴)	J ₀ (cm ⁴)
1 CovPL 10×200	20	93.5	1870	174845	2
1 PL 25×300	75	91.25	6844	624492	39
0.5 WebPl 9×90	81	45.0	3645	0	437400
0.5 WebPl 9×90	81	-45.0	-3645		
1 PL 25×300	75	-91.25	-6844	624492	39
1 CovPL 10×200	20	-93.5	-1870	174845	2
Σ	352		0	2036156	

剪断応力度の計算 (S=150 000 kgf)

	のど厚	一次モーメント	剪断流	剪断応力度
	t (cm)	ΣQ (cm ³)	SQ/J (kgf/cm ³)	τ (kgf/cm ²)
カバープレート溶接部	0.85	-1870	138	162
上フランジ接続溶接部	1.13	-8714	642	568
ウェブ中立軸	0.9	-12359	911	1012

7.2.2 リベット桁のフランジ部分繋ぎリベットの検証

リベットで組み立てられた図 7.5 に示す桁断面において、剪断力 S = 50 tf を受ける時の綴りリベットに作用する力を計算します。腹板から伝えられる剪断力の流れは、まず左右の山形鋼（アングル材に伝わり、さらにその上のカバープレートへと伝えます。溶接構造では、溶接が桁の長手方向に連続していますが、リベットは、桁の長手方向に板を或る間隔で綴ります。ここではリベットピッチを 75mm としましたが、これは、図 7.1 の長さ ΔL に当たります。

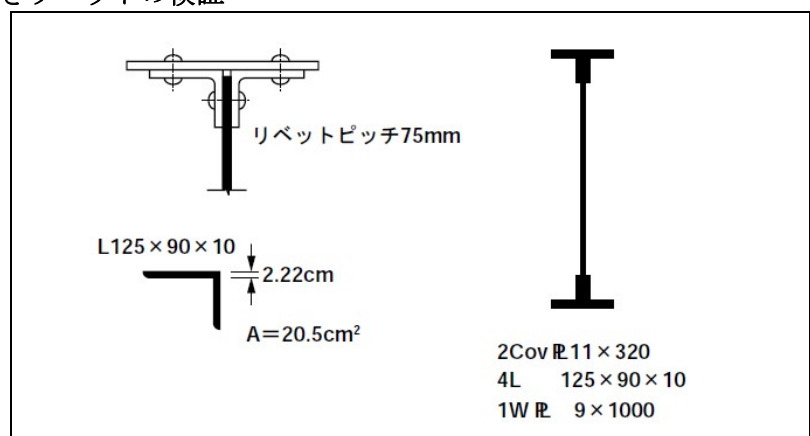


図 7.5

断面定数の計算

断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント	二次モーメント	
	A (cm ²)		Q=Ay (cm ³)	Ay ² (cm ⁴)	J ₀ (cm ⁴)
1 CovPL 11×320	35.2	50.5	1778	89769	4
2L 125×90×10	41	47.8	1960	93678	276
0.5 WebPl 9×50	45.0	25.0	1125	0	75000
0.5 WebPl 9×50	45.0	-25.0	-1125		
2L 125×90×10	41	-47.8	-1960	93678	276
1 CovPL 11×320	35.2	-50.5	-1778	89769	4
Σ	352		0	442454	

リベットに作用する剪断力の計算 (S=50 tf、リベットピッチ ΔL=7.5cm)

	リベット数	一次モーメント	剪断力	一本あたり
	本数	ΣQ (cm ³)	SQΔL/J (kgf)	ρ (kgf)
カバープレート接続部	2	1778	1507	754
ウェブとの接続部	1	3738	3168	3168
ウェブ中立軸 (*1)	1	4863	4122	4122
ウェブ中立軸 (*2)	板厚 0.9cm	4863	549 (kgf/cm ³)	611 (kgf/cm ²)

備考 (*1) ウェブの中立軸の位置で、図 7.4a のような接続を考えた場合
 (*2) ウェブの最大剪断応力度の計算では、ΔL=1 として計算する。

解説

1945 年以前の鋼構造物は、殆どリベット構造として建設されていました。1980 年代ころから、これに代わる高力ボルト摩擦接合を使うようになりました。しかし力を伝える原理は、リベット接合と共通するところがあります。古いリベット構造物の計算法を理解しておくために、この項で例題として説明することにしました。リベット構造の柱や梁を組み立てるときは、図 7.6b のような形式で接合します。図 7.6a のような水平な方向のリベット接合は、組み立て目的で使われますが、ここにも剪断力の計算が必要です。リベットの説明は、下記の URL にまとめてあります。

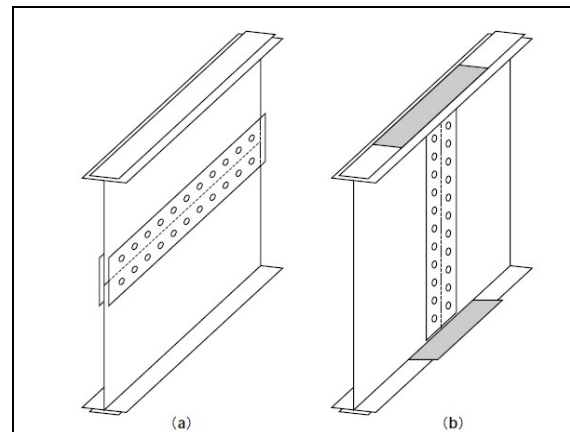


図 7.6

鋼構造物設計アーカイブ「リベット構造」

http://www.nakanihon.co.jp/gi_jyutsu/Shimada/Rivet/Index.html

7.2.3 鉄筋コンクリート桁の付着応力度

曲げを受け持たせる鉄筋コンクリート桁の実用設計法では、コンクリートの引張強度を無視し、鉄筋が引張力を受けるとして、鉄筋の所要断面積を計算します。引張り側のコンクリートが無いわけではありません。鉄筋はコンクリートで囲われていて、その表面でコンクリートから剪断応力の授受があることで、鉄筋には長手方向の応力度の変化が起きます。コンクリート工学では、これを付着応力度と言うことになっていて、その強度はコンクリートの引張強度とほぼ同じです。大きな直径の鉄筋を使うと、鉄筋の周長が不足して付着面積が小さくなって、付着応力度が過大になることがあります。

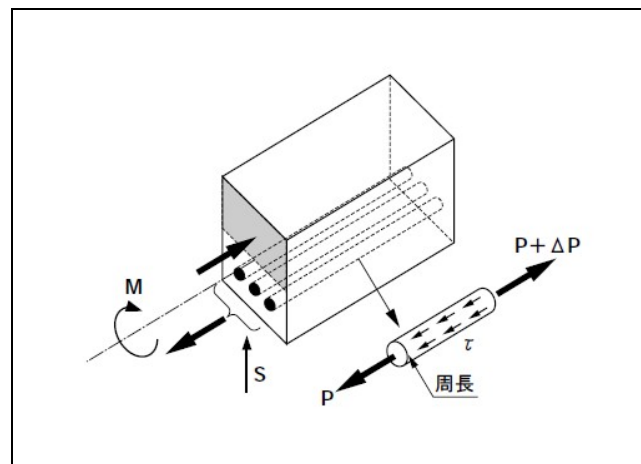


図 7.7

7.2.4 合成桁のズレ止めの検証例

鉄筋コンクリート床版を持つ鋼桁橋の設計では、全体を一体化した合成桁として設計することが普通になりました。この場合、コンクリート部分と鋼桁の接続面で剪断力の受け渡しの目的に、**ズレ止め**(shear connector)、ドイツ語の用語ではジベル、を設け、これに作用する剪断力を検証します(図 7.8)。ズレ止めには種々の工夫がありますが、図 7.8 はブロック状の金具と、サンダル引の引っ掛かりに似た鉄筋も補助にして、コンクリート床版と鋼桁とのズレを抑えます。鉄筋を傾ける方向は、床版が動こうとする向き(ここでは左方向)です。床版はブロック支圧面で止められ、その剪断力はブロックと鋼桁との隅肉溶接部を介して鋼桁フランジに伝えられます。ズレ止めの、鋼桁長手方向のピッチが、図 7.1 での ΔL に当たります。断面定数の計算では、コンクリートの作用を鋼に換算しますので、鋼とコンクリートとのヤング率比を 7 と仮定します。合成断面は上下非対称な構成ですので、例題計算では、先に中立軸を求めてからコンクリート床版部の断面一次モーメント Q と断面二次モーメント J を計算しています。

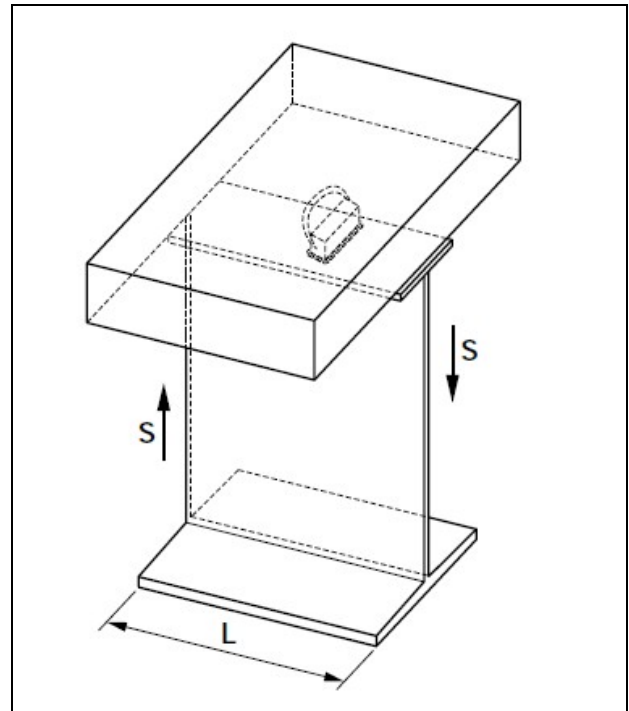


図 7.8

重心位置の計算 (ヤング率比 $n = 7$)

断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント
	$A(\text{cm}^2)$	$y(\text{cm})$	$Q=Ay(\text{cm}^3)$
床版 2000×180	514	73.0	37522
1 PL 250×12	30	50.8	1518
1 WebPl 9×1000	90	0	0
1 PL 420×25	105	-51.25	-5381
Σ	739		33659
中立軸の位置: $e = Q/A = 33659/739 = 45.5$			

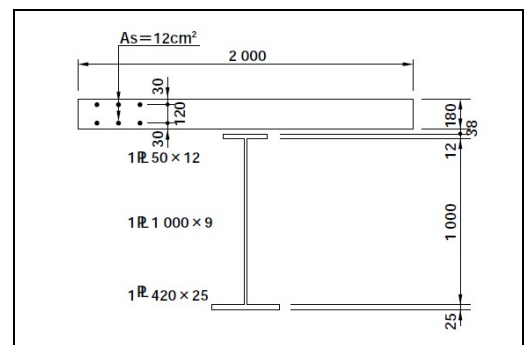


図 7.9

断面定数の計算 (ヤング率比 $n = 7$)

断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント	二次モーメント	
				$Ay^2(\text{cm}^4)$	$J_0(\text{cm}^4)$
	$A(\text{cm}^2)$	$y(\text{cm})$	$Q=Ay(\text{cm}^3)$	$Ay^2(\text{cm}^4)$	$J_0(\text{cm}^4)$
床版 2000×180	514	27.5	14135	388713	13886
1 PL 250×12	30	5.3	159	843	4
1 WebPl 9×1000	90	-45.5	-4095	186323	75000
1 PL 420×25	105	-96.75	-10159	982859	55
Σ	739		(≈ 0)	1647683	

ズレ止めに作用する剪断力 ($S = 70tf$ 、桁の支点位置で最大、ズレ止めピッチ $\Delta L = 30\text{cm}$)

$$SQ \Delta L / J = 70000 \times 14135 \times 30 / 1647683 = 18015 \text{ kgf}$$

鋼桁腹板最上部の剪断応力度

$$\tau = SQ / J / t = 70000 \times (14135 + 159) / 1647683 / 0.9 = 675 \text{ kgf/cm}^2$$

7.3 剪断中心の計算

7.3.1 部材としての捻じれと構造物としての捻じれ

構造物の部材として最もクセのない形状は円断面です。これをモデル化するときは、便宜上、幅も厚みもない線状の部材として扱います。長さは、構造物としての属性です。部材としての弾性的性質を言うときは、微分的に考えた単位長さで表したときの力と変形のことを言います。この単位長さの部材では、長さの両端での応力は、大きさが同じで向きが反対です。或る長さの直線または曲線を描く柱や梁、長さ方向に最初から捻じれている場合などは、幾何学的な属性です。長さを考えた両端で、力と変形の関係が単純になりません。丸い断面の部材は、構造に構成するとき不便なことが多いので、実用部材は、矩形の組み合わせの断面が多く採用されます。そうすると、これは、ミクロに見れば、複雑な構造物になりますので、特殊な力と変形も扱う必要が起きます。これを単純化する考え方の一つが、前の第6章、6.1.4項に挙げた平面保持の仮定です。実は、剪断応力度を考えると、平面保持は成り立たないのです。もう一つの面倒な問題が捻じれです。梁に作用させる外力の作用線が梁の重心線を通るようにしても、梁に捻じれが起きる断面構成の部材があります。この部材では、断面の**重心**から外れた個所に**捻じれ中心**があって、外力の作用線が捻じれ中心を通るようにすると、部材に捻じれ変形が出ません。この節では、薄板で構成した断面形の捻じれ中心を説明します。この中心は、梁に外力が作用したときの、部材断面の剪断応力度の合力が通る中心として求めますので、材料力学では**剪断中心**(shear center)の方を用語とします。捻じれ中心の用語は、構造力学的に捩じりの問題を扱うときに使います。

7.3.2 捻じれ難い長い針金を捩じると螺旋を描く

細い円断面の針金を、円柱に螺旋を描くように巻きつける変形を考えて下さい。身近にある物として、例えば、電気掃除機の電源コードのような、やや腰の強い、あまり捻じれが出ない線材を実験に使うことができます。コードの端を持って捻じると、コードを真っ直ぐにすることができなくて、螺旋状に曲がりが出ます。この変形は、コードの曲げの向きが長さ方向に少しずつ曲がることで起こり、コード自体は捻じれがありません。コードの長さ方向に平行な稜線を描いておいて、このコードを円柱に螺旋状に巻き付けていくと、円柱に接する稜線が順にずれていきます。円柱の軸線方向からコードを見れば、断面は捻じれていきますが、これは幾何学的に起きる捻じれであって、コード自体は部材としては捻じれません。丸い断面のコードでは気が付かないのですが、円形以外の断面をしたコード、または細い四角な断面の部材を螺旋状に巻き付けるとき、一つの面を巻きつける側の円柱側面に接するようにするには、強制的に捩じり込むようにしなければなりません。薄い紙テープを円柱に螺旋状に張り付けるのは簡単にできます。この場合、紙テープを軸方向に対して斜めに曲げを入れます。この曲げは、紙テープに長手方向に直角な曲げと同時に長手方向を軸とした捻じれを加えることになっています。螺旋形を描くような、梁の立体的な変形を扱うのは、構造力学の方の課題であって、この論説で扱う材料力学の課題とは別問題です。

7.3.3 剪断中心の計算例題

幅も厚みもあり一般的な形状の梁断面部材では、剪断応力度の分布がどうなっているかの詳細は、よくわかりません。矩形断面は、理論モデルを考えることができますが、例えば、円断面では剪断応力度がどのように分布するかは、材料力学の学問的研究課題です。構造物の部材設計では、剪断中心を特に計算しなくても断面の提案ができます。したがって、剪断中心は、材料学の知識として必要であっても、具体的な数値計算をする機会はありません。剪断中心の計算は、剪断応力度の向きを、断面図形を見て、確認しながら進めます。案外手間のかかる手計算を必要としますので、汎用のプログラミング言語を使うソフトウェアの開発には向きませんでした。以下に例示した計算例は、電卓を使って計算したものです。この計算手順は、表計算の形にまとめますので、例えば MS-EXCEL のような表計算ソフトが便利に利用できるようになりました。

この節では、教育目的を兼ねて、溝形鋼をモデル化した、片仮名のコの字形をして薄板断面での数値計算例を示します。一方、ギリシャ文字の π に形をした断面図形は、橋梁では2主桁橋の断面形として見られます。 π の文字で、左右の耳を切って90度回転したときの計算は、図7.10を横向きに剪断力が作用する場合です。こちらも橋中心から偏心して荷重が載ると捻じれますが、普通は、構造力学的に主桁に注目した捻じれを扱い、捻じれ中心のことを考えません。剪断中心は、垂直・水平の二方向で求めます。例題計算は、意図的に上下・左右に非対称な断面を扱うことにしました。計算条件と計算結果は、次ページの最初に図示し、その後計算例をまとめました。

演習例題 7.1

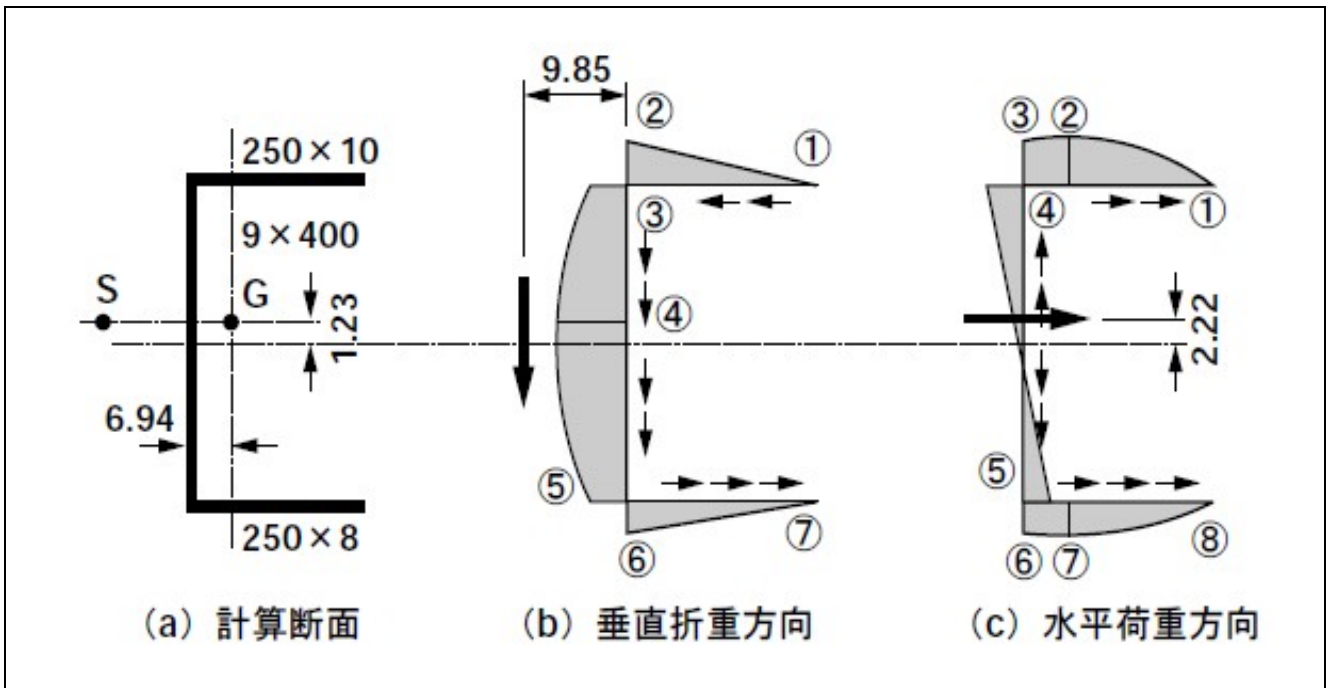


図 7.10 剪断流の合力で求める剪断中心

(i) 垂直方向に剪断力を受ける場合の計算

重心位置の y 座標の計算

断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント	二次モーメント	
$b \times t$ (cm)	A (cm ²)	y (cm)	$Q=Ay$ (cm ³)	Ay^2 (cm ⁴)	J_0 (cm ⁴)
25×1.0	25.0	20	500	10000	2
0.9×40	36.0	0	0	0	4800
25×0.8	20.0	-20	-400	8000	1
	81.0		100	22803	
$e = Q/A = 100/81 = 1.23$			$Ae^2 = Qe =$	123	
			$J_y =$	22680	

剪断中心の x 座標の計算

番号	板幅	板厚	縦軸距離			剪断流面積	偏心距離	モーメント
	b (cm)	t (cm)	y (cm)	$\Delta q = bty$	q	Σq (cm ³)	r (cm)	$r \Sigma q$ (cm ⁴)
1		0			0	5863	20	117260
2	25.00	1.0	18.77	469	469			
3		0.9			469	(*1) 10793	0	0
4	18.77	0.9	9.39	159	628			
5	21.23	0.9	-10.62	-203	425	(*1) 11895		
6		0.8			425	5313	20	106260
7	25.00	0.8	-21.23	-425	0			
$\Sigma (*1) =$						22688 (*2)	$\Sigma =$	223520

剪断中心の x 座標：ウェブから左 $C_x = 223520 / 22688 = 9.85$ cm

備考(*2)：この値は断面二次モーメント J_y と同じですが、数値計算の誤差があります。

(ii) 水平方向に剪断力を受ける場合の計算

重心位置の x 座標の計算

断面	断面積	横軸距離	二次モーメント		
			一次モーメント	二次モーメント	
$b \times t$ (cm)	A (cm ²)	x (cm)	q (cm ³)	Ax^2 (cm ⁴)	J_0 (cm ⁴)
25×1.0	25.0	12.5	312.5	3906	1302
0.9×40	36.0	0	0	0	2
25×0.8	20.0	12.5	250.0	3125	1042
Σ	81.0		562.5	9377	
$e = Q/A = 562.5/81 = \mathbf{6.94}$			$Ae^2 = Qe =$	3904	
			$J_x =$	5473	

剪断中心の y 座標の計算

番号	板幅	板厚	横軸距離			剪断流面積	偏心距離	モーメント
	b (cm)	t (cm)	x (cm)	$\Delta q = btx$	q	Σq (cm ³)	r (cm)	$r \Sigma q$ (cm ⁴)
1		1.0			0	(*1) 1962	20	60760
2	18.06	1.0	9.03	163	163	+		
3	6.94	1.0	3.47	-24	139	(*1) 1076		
4		0.9			139			
5	40.0	0.9	6.94	-250	-111			
6		0.8			-111	(*1) 861	-20	-48620
7	6.94	0.8	3.47	-19	-130	+		
8	18.06	0.8	9.03	130	0	(*1) 1570		
$\Sigma (*1) =$						5469 (*2)	$\Sigma =$	12140

剪断中心の y 座標：ウェブ中央から上 $C_y = 12140 / 5469 = \mathbf{2.22}$ cm

備考(*2)：この値は断面二次モーメント J_y と同じですが、数値計算の誤差があります。

8. 剪断応力度に関する特殊な問題

8.1 曲げを受ける梁の剪断応力度によるソリ

8.1.1 部材断面の凹凸変形をソリと言う

細長い柱や梁の変形を言うときは、主に、長手方向の曲げ変形を指します。部材としての剪断変形の大きさは、実用的には無視できます。しかし、建築物の骨組み構造で構成された全体をマクロに見て高さ方向の柱として扱うとき、地震時の変形で見ると、剪断変形の方が観察されます。この変形を抑える目的の部材が筋交いや耐震壁です。トラス橋の場合は、筋交い相当の斜材も主構造として設計されます。トラス橋の変形を計算するとき、全体をマクロに見て梁に換算することも行われますが、剪断変形の寄与は無視できます。ただし、これらの議論は、構造力学の課題に属します。材料力学では、均質な材料の弾性体の梁が、剪断力を受ける場にあるときの応力度の性質を解析することを、主な課題とします。部材の長手方向の、応力度の分布を知る解析が第一義です。この説明と例題は、第5章にまとめました。設計上の課題として、剪断応力度の現れ方を解析することが第二義的に重要です。この説明と例題が第7章でした。ここまでの解析では、梁の変形を扱うとき、断面の平面保持の仮定(6.1.4項参照)を採用していました。しかし、剪断応力度を考えると、平面保持の仮定が成立しません。その影響をどのように扱うかをこの章で説明します。部材断面の剪断応力度の分布が一律でないと、理論上、最初に平面であった断面が、紙製の皿(ソーサ)のように変形します(図8.1)。この変形を平均化した平面を考えて、その面からの凹凸を反り(ソリ:warping)と言います。反りは、剪断応力度による剪断歪みの累積で起こり、さらに条件次第で局所的な応力度分布を起こします。これを剪断遅れ(shear lag)と言います。剪断応力度の分布を理論的に扱う場合、矩形断面を扱うのが基本です。その応用が、薄い矩形断面の集合、つまり、薄板で構成した断面形状での解析です。剪断遅れは、前の第7章で紹介した剪断流の解析を踏まえ、剪断歪みの累積を計算して求めます。

8.1.2 剪断を受ける矩形断面の梁

図8.1に示すような、薄肉のI形の梁を考え、断面の剪断応力度の分布をまず描きます(図8.1a)。剪断応力度を受ける二次元の応力状態の板は、第3.2節で説明したように、矩形が平行四辺形に変形します。それがどのように桁断面に現れるかを、やや強調して見取り図に描いたものが図8.1bです。この図では、梁の長手方向を水平にしましたので、断面各部は垂直な断面から長手方向に移動し、断面全体は平均して或る微小角度だけ傾きます。これが梁としての剪断変形です。図8.1cは、断面各部の移動の状態を、薄板を座標軸にして関数図形のように作図したものです。ウェブの剪断応力度分布は放物線ですので、移動量を示すグラフは三次曲線です。フランジでは剪断応力度分布が直線ですので、移動量を示すグラフは二次曲線です。長手方向の移動量全体は、平行移動分と回転分と持ちます。これを引いた変形分が断面の反りです。今、図8.2のような薄肉断面部材を考えて、中央に集中荷重を作用させます。中央に対して左右の梁の剪断力は、向きが反対です。この桁は集中荷重の作用位置で折れ曲がるように接続します。しかし、反り分は、このままでは繋がりません。実構造では、断面変形を抑える剛な隔壁などを介します。したがって、この反りを打ち消すように、軸方向に二次的に垂直応力度が発生します。これが剪断遅れです。これは、サンブナンの原理が適用できる局所的な応力度です。

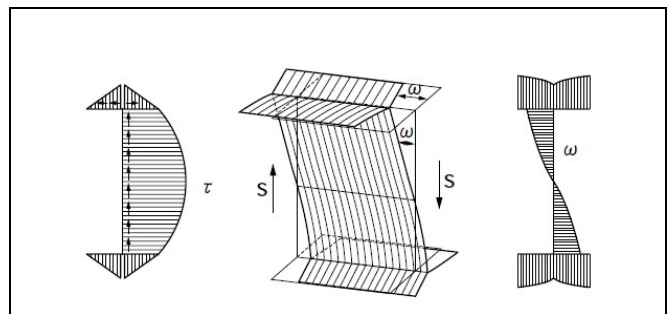


図8.1 反りによる軸方向の変形

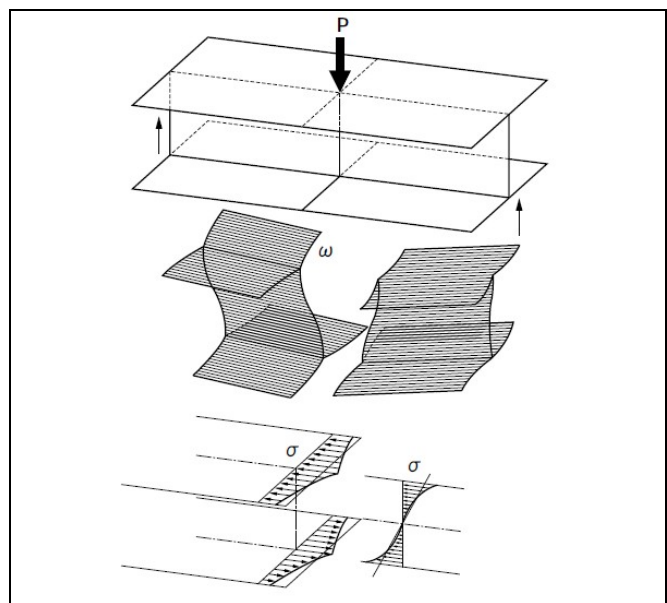


図8.2 左右の反りが食い違う場合

8.1.3 数値計算の例題と解説

剪断遅れの計算は、理論モデルを仮定した実用的な公式を提案することができません。その理由は、断面形状のパラメータが複雑だからです。剪断応力度を計算するとき、それが板要素のどちらを向くかの判断は、断面図形を見て結果を作図して確認しなければなりません。仮に、標準形状、例えばH形など、を使うことに限定すれば、代数式を提案し、計算手順をプログラミングすることができます。しかし、少し形状を変更すれば、個別の断面ごとに毎回プログラミング文を変更しなければなりません。したがって、汎用のプログラミング言語を使うコンピュータを利用するよりも、卓上計算機を使う手計算で作業を進めることが普通でした。この作業は、表計算ソフト、例えば MS-EXCEL などの利用が便利になりましたので、手計算の感覚で計算手順を組み立てる（プログラミングする）ことができるようになりました。この場合、何かの見本になる例題を使って、プロトタイプ的なプログラミングがあると、分かり易いでしょう。以下の例題は、電卓を使ってまとめました。この例題計算は、そっくり MS-EXCEL で、組み立てることができると、ユーザレベルで挑戦してみてください。計算例に使った薄肉断面は、第7章、図7.3に示したH形鋼モデルを上下非対称にしました。上下対称の断面を扱うと、計算処理がずっと簡単になりますが、教材に使うことを考えて、敢えて上下非対称な断面を例題にしました。剪断力は上下方向に作用する向きで計算しました。数値計算を進めるとき、計算結果を簡単な見取り図に描いて、視覚的に確認をします。これは手作業ですので、結構な手間が掛かります。MS-EXCEL で作業を進めるにしても、図の作成と貼り込みは、数値計算とは別作業です。このような面倒さがありますので、具体的で丁寧な計算例は参考書に紹介されることは殆どありませんでした。なお、電卓で計算するとき、或る個所で四捨五入した数値を次の計算に使いますので、数の丸めで見掛け上の誤差が出ることに注意します。MS-EXCEL を使えば、式を正直に計算し、正確な数値は裏に保存されています。数をモニタに表示するとき、また印刷出力の場合にも、適度な丸めの書式を指定することができます。数値の表現と単位系をどのような書式（フォーマット）にするかは、計算をする人の工夫が反映されますので、それなりに興味を持って計算書を観察するのがよいでしょう。

(i) 重心位置の計算（計算の出発は、座標系の原点をウェブ高さの中央におきます）

断面	断面積	縦軸距離	一次モーメント
$b \times t$ (cm)	A (cm ²)	y (cm)	$Q=Ay$ (cm ³)
80×0.8	64.0	40	2560
0.9×80	72.0	0	0
40×0.8	32.0	-40	-1280
Σ	168.0		1280
中立軸の位置： $e = 1280 / 168 = 7.62$ cm			

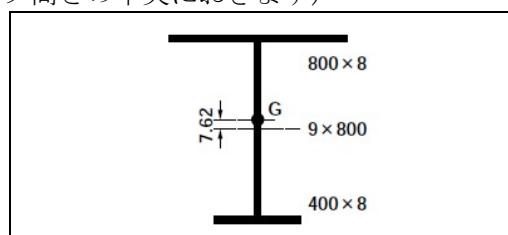


図 8.3 例題に使った薄肉断面

(ii) 剪断流と剪断応力度の計算 ($S_y=1000\text{kgf}$ で計算)

番号	板幅	板厚	縦軸距離		Σ	剪断流面積(*2)	面積の加算	剪断力度
	b (cm)	t (cm)	y (cm)	$\Delta q = bty$	q	$Q = \Sigma q$ (cm ⁴)	w (cm ⁴)	$\tau = S_y Q / t J_y$
1				0	0		98000	0
2	40	0.8	32.38	1036	1036	20717	77280	7.1
3				0	0	0	98000	0
4	40	0.8	32.38	1036	1036	20717	77283	7.1
5		0.9		0	2072		77283	12.6
6	32.38	0.9	16.19	472	2544	77283 (*1)	0	15.5
7	47.62	0.9	-23.81	-1020	1524	104947 (*1)	-104955	9.3
8				0	0		-112575	0
9	20	0.8	-47.62	-762	-762	7621	-104955	5.2
10				0	0		-112575	0
11	20	0.8	-47.62	-762	-762	7621	-104955	5.2
q の単位は断面一次モーメント (cm ³) です						Σ (*1)= 182230	(*3)	図 8.4 参照

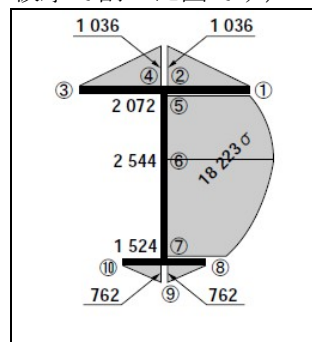
備考(*1)：ウェブ部分の和が、断面二次モーメント J_y です。

備考(*2)：この列の数値計算式は、下の (iv)、式 8.2 です。

備考(*3)：番号 6 の位置で剪断流を 0 として、左の列の数値を加算します (図 8.5 参照)。

(iii) 剪断流作図 (剪断流は $t \times \tau$ ですので、応力度の分布図は、板厚で割った図です)

番号	板幅	q の板幅方向の分布	二点での値
	b (cm)	(式 8.1)	
2-1	40	$1036 - 32.38 \times 0.8 \times s$	1036 ~ 0
4-3	40	$1036 - 32.38 \times 0.8 \times s$	1036 ~ 0
6-5	32.38	$2544 - 0.9 \times s^2 / 2$	2544 ~ 2072
6-7	47.62	$2544 - 0.9 \times s^2 / 2$	2544 ~ 1524
9-8	20	$762 - 47.62 \times 0.8 \times s$	762 ~ 0
11-10	20	$762 - 47.62 \times 0.8 \times s$	762 ~ 0
			(*1)



備考(*1) : 図 8.4 は、剪断応力度 τ の分布とほぼ相似

図 8.4 剪断流図

(iv) 板要素ごとの軸方向変位分布図

剪断歪み γ は、単位板長さで τ / G です。板幅方向に加算していくと、断面の軸方向の変位になります。いま、 $\gamma = (Q/t) (S/GJ)$ ですので、数値計算は (Q/t) を板幅方向に積分して、板要素ごとの軸方向の変位成分を Δw とします。

番号	板幅	板厚	式 8.1 の積分式	式 8.2 の板厚補正式	計算値
	b (cm)	t (cm)	(式 8.2) (*1)	(式 8.2) / t (*2)	Δw (cm ³)
2-1	40	0.8	$1036 \times s - 12.952 \times s^2$	$1295 \times s - 16.19 \times s^2$	0 ~ 25896
4-3	40	0.8	$1036 \times s - 12.952 \times s^2$	$1295 \times s - 16.19 \times s^2$	0 ~ 25896
6-5	32.38	0.9	$2544 \times s - 0.9 \times s^3 / 6$	$2827 \times s - s^3 / 6$	0 ~ 85880
6-7	47.62	0.9	$2544 \times s - 0.9 \times s^3 / 6$	$2827 \times s - s^3 / 6$	0 ~ 116623
9-8	20	0.8	$762 \times s - 19.048 \times s^2$	$953 \times s - 23.81 \times s^2$	0 ~ 9536
11-10	20	0.8	$762 \times s - 19.048 \times s^2$	$953 \times s - 23.81 \times s^2$	0 ~ 9536

備考(*1) : すべての式表現で、変数 s には b を代入して数値計算します。

備考(*2) : 軸方向の変位は剪断歪みの累積ですので、剪断流の値を t で割ります。

(v) 桁断面として累積した軸方向の変位図

番号	板幅	⑥を0とした w の分布式	計算値
	b (cm)	(式 8.3)	w (cm ³)
2-1	40	$85880 + 1295 \times s - 16.19 \times s^2$	111776
4-3	40	$85880 + 1295 \times s - 16.19 \times s^2$	111776
6-5	32.38	$0 + 2827 \times s - s^3 / 6$	85880
6-7	47.62	$0 - 2827 \times s + s^3 / 6$	-116624
9-8	20	$-116624 - 953 \times s + 23.81 \times s^2$	-126160
11-10	20	$-116624 - 953 \times s + 23.81 \times s^2$	-126160

備考(*) : 中立軸の位置で、軸方向変位を 0 とした作図。

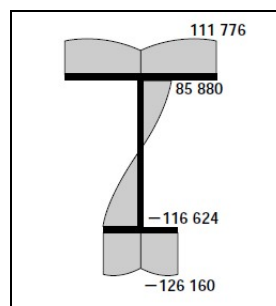


図 8.5 (*)

(vi) 板幅分の軸方向変位の面積と累計

図 8.5 は 6 の位置で変位を 0 とした仮の計算ですので、断面全体 (板厚込み) の軸方向変位を 0 にする補正値の計算をします。

番号	板幅	板厚	面積計算のため式 8.3 の積分式	面積計算値	軸力分
	b (cm)	t (cm)	(式 8.4) (cm ⁴)	W (cm ⁴)	$t \times W$ (cm ⁵)
2-1	40	0.8	$85880 \times s + 1295 \times s^2 / 2 - 16.19 \times s^3 / 3$	4122613	3298090
4-3	40	0.8	$85880 \times s + 1295 \times s^2 / 2 - 16.19 \times s^3 / 3$	4122613	3298090
5-6	32.38	0.9	$0 + 2827 \times s^2 / 2 - s^4 / 24$	1436201	1292581
6-7	47.62	0.9	$0 - 2827 \times s^2 / 2 + s^4 / 24$	-2991081	-2691973
9-8	20	0.8	$-116624 \times s - 953 \times s^2 / 2 + 23.81 \times s^3 / 3$	-2459587	-1967670
11-10	20	0.8	$-116624 \times s - 953 \times s^2 / 2 + 23.81 \times s^3 / 3$	-2459587	-1967670
(*)			$N=1261448 / 168.0 = 7509$ (cm ³)	$\Sigma =$	1261448

(vii) 補正した軸方向の変位図

番号	板幅	式 8.3 を補正した w の分布式	計算値	面積計算値
	b (cm)	(式 8.6)	w (cm ³)	W (cm ⁴)
2-1	40	78371 +1295×s -16.19×s ²	104267	3822253
4-3	40	78371 +1295×s -16.19×s ²	104267	3822253
6-5	32.38	-7509 +2827×s -s ³ /6	78371	1193060
6-7	47.62	-7509 -2827×s +s ³ /6	-124133	-3348660
9-8	20	-124133 -953×s +23.81×s ²	-133669	-2609767
11-10	20	-124133 -953×s +23.81×s ²	-133669	-2609767
備考(*) : 中立軸の位置 6 で、7509 に補正した図				(*)

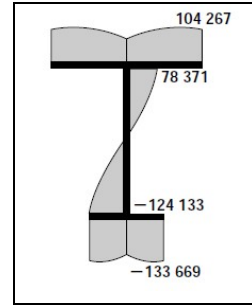


図 8.6 (*)

(viii) 軸方向変位のモーメント分の計算

図 8.6 を、曲げモーメントを受ける梁の軸応力度の分布と釣り合うと見なしたとき、このモーメントの大きさを計算します。そうしておいて、符号を変えてこのモーメントによる軸応力度分布を、図 8.6 のグラフと加算すると、局部的な軸方向変位分だけが残ります。この計算は次の (ix) で行います。

番号	板幅	板厚	縦軸距離	モーメントの計算 (*)	計算値	t × 計算値
	b (cm)	t (cm)	y (cm)	(cm ⁵)	×10 ⁶	×10 ⁶ (cm ⁶)
2-1	40	0.8	32.38	32.38 × 3822253	124	99
4-3	40	0.8	32.38	(32.38) ² × 3822253	124	99
5-6	32.38	0.9	s	-7509 × s ² /2 + 2827 × s ³ /3 - s ⁵ /30	27	24
6-7	-47.62	0.9	s	-7509 × s ² /2 - 2827 × s ³ /3 + s ⁵ /30	77	69
9-8	20	0.8	-47.62	(-47.62) × (-2609767)	124	99
11-10	20	0.8	-47.62	(-47.62) × (-2609767)	124	99
M/J=489 × 10⁶ / 182230 = 2683 (cm²)					Σ =	489

備考(*) : [(縦軸距離)² × (式 8.6 の板幅分)] の積分

(ix) 反りによる軸方向変位の計算 : $S/GJ=1000/(8.1 \times 10^5 \times 182230=0.00677 \times 10^{-6})$

番号	w	-M × y/J	反り分布	軸方向変位
	(vii) 参照		(cm ³)	×10 ⁻⁶ (cm)
	(a)	(b)	(a)+(b)	
1	104267	-86876	17391	118
2	78371	-86876	-8505	-58
3	104267	-86876	17391	118
4	78371	-86876	-8505	-58
5	104267	-86876	17391	118
6	-7509	0	-7509	-39
7	-124133	127764	3631	25
8	-133669	127764	-5905	-40
9	-124133	127764	3631	25
10	-133669	127764	-5905	-40
11	-124133	127764	3631	25

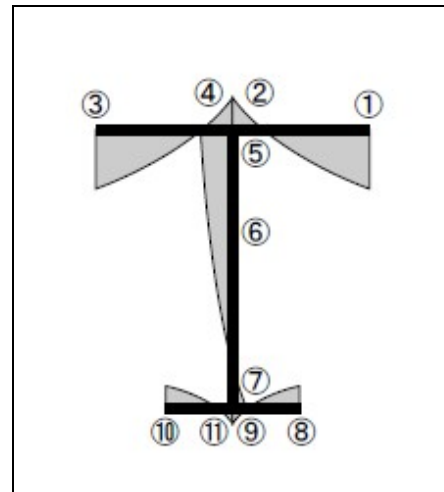


図 8.7 反りの分布図

ここで求めた反り分布の単位は (cm³) です。梁断面に生じる軸方向の変位は、(S/GJ) を乗じますので、無次元の歪みではなく、長さの単位 cm です。発生する応力度は、これにヤング率 E を乗じた値にはなりません。正確に応力度を求めようとなると、桁全体の境界条件を考えて、二次元応力状態の解析をします。有限要素法 (FEM) を使う応力解析を使うときは、半無限の板の端に強制的な変位を与えて解きます。ここで、図 8.2 を見て下さい。荷重の作用位置では左右の桁断面の反り分布を平面に戻すための局部応力が作用することになります。定性的に考えると、荷重の作用する個所のウェブ上端は圧縮応力度が余分に出ることが分かります。これが剪断遅れです。これを設計時に考えるのが、フランジの有効幅の議論です。次節でこの解説をします。

8.2 幅広のフランジ有効幅

8.2.1 座屈を考える薄板の組み合わせ部材

マクロに部材を見て、薄板を組み合わせた断面を持つ梁や柱は多く実用されています。鋼のカタログ化された形鋼が代表的です。鋼のプレートガーダー（钣桁）もそうです。鉄筋コンクリート構造のT桁や鋼コンクリートの合成桁は、主桁から張り出した床版の或る幅の範囲を薄板のフランジと見なして、主桁と一体化した一つの部材として計算することが実用されています。前節の図 8.2 に図示したH断面の桁は、支間に対して相対的にウェブの高さが高く、またフランジ幅も広く描いてあります。フランジ幅が広いと、張り出し長さの大きい薄板はリボンで作成した波型の縁取り（フリル）のような性質が現れ、幾何学的な形状を保たせることができません。曲げ部材の圧縮側になる場合、この変形は板の座屈と繋がります。したがって、実用的には板厚に対して張り出し幅を制限します。これが**有効幅**(effective width)を提案する一つの根拠です。鋼の薄板では、理論的な根拠は、板の圧縮座屈を考えなくても済むようにすることです。その提案は、片側に張り出す幅を、有効断面に組み入れる範囲として板厚の 12～15 倍が設計上の常識です。山形鋼、I 形鋼などの断面形状は、張り出し部の幅と板厚の比がそのように決められています。H形鋼のウェブでは、板の両端が変形を抑える作用をしますので、板厚の 40～60 倍の範囲でウェブ高さが決められています。これが有効幅の一つの実用的な解決です。鋼の形鋼のカタログを見ると、板厚・板幅比に注目して下さい（表 4.1、表 4.2 参照）。この板幅制限は、座屈変形を抑えることを目的としたものですので、補剛材の配置間隔を決める場合に応用されます。なお、引張り応力場にある板は、座屈を考える必要がありませんが、板全体の曲げ変形を抑えるため、上の制限幅の 1.5～2 倍にします。

8.2.2 実験事実の説明に有効幅の考えが必要になる

航空機の機体は、容積が大きく取れる断面形にするため、軽量で剛度の大きい曲げ部材を工夫します。そうすると、薄板を補剛リブや主桁部材などで構成した、幅の広い薄板断面形が多く採用されます。この部材を曲げで破壊するまで実験すると、薄板全体ではなく、或る幅部分を有効とする断面、つまり有効幅を使って実験結果を説明するのが実践的であることが分かります。実際の使用状態は、応力が弾性範囲内に収まるようにします。これが許容応力度です。しかし、設計時には有効幅を考えて、応力の検証をしなければなりません。この理論的モデルに、前節の剪断遅れの理論が応用されます。

8.2.3 有効幅の提案原理

剪断遅れは、単独に発生する応力ではなくて、構造物としては、曲げ応力度と合わせて考えます。そうすると、例えば、図 8.2 のように、単純に支持された梁の支間中央に荷重が作用すると、支間中央では、曲げモーメントによる圧縮応力度と剪断遅れによる局所的な圧縮応力度が加算されます。この状態が材料の降伏点応力度を超えるようであれば、荷重が作用する度に、継続的に破壊が進行することになります。したがって、材料の使い方から見れば不経済になるのですが、有効断面を小さく仮定した上で弾性設計をします。剪断遅れによる応力度は、剪断力の変化の大きな部位で、かつ断面の軸方向の変位が拘束される個所で大きくなります。これは、橋梁構造では支点付近です。単純支持形式の梁では、支点付近は曲げ応力度分が小さいので、断面に余裕があります。一方、連続橋の場合、中間支点は剪断力の変化が大きく、また負の曲げモーメントも大きいので、下フランジについて有効幅を考えて応力の検証をしなければなりません。部材の断面寸法は、主に曲げモーメントで決めます。剪断力（の変化）は、主に大きな自動車荷重の通行で起こります。曲げモーメントの方は、支間が長ければ大きくなります。

8.2.4 有効幅の規定

橋梁構造物の設計時に利用する実用的な提案は、設計示方書にあります。鋼橋の場合は、大体の目安として、片側の有効幅を支間の 15%です。実際の桁橋の構造設計では、主桁間隔は支間の 30%よりも狭い場合が普通ですので、フランジ部分全体が有効断面として、支間中央断面では、主桁ウェブと一体化した設計計算をすることができます。鉄筋コンクリート床版を主桁断面に組み込む設計は、鋼桁を主桁に使う合成桁と、鉄筋コンクリートT桁があります。床版は、主桁との接続の個所にハンチを設けて版厚を大きくしますが、その外側に張り出す部分では、支間の 1/8 を有効幅にすることが規定されています。数値の 1/8 は 12.5%ですので、実質的には鋼断面の場合の 15%とほぼ同じになります。

8.3 棒の捻じれ

8.3.1 二種類の捻じれ剛性がある

細長い部材を捩じるとききの力学では、二つの種類の用語があります。**単純捻じれ**（またはサンブナンの捻じれ）と**曲げ捻じれ**です。曲げ捻じれについては、材料力学よりも構造力学の課題として扱う方が適しています。その理由は、橋梁構造の構造解析から言えることです。この解説は、後の第 8.4.3 項で取り上げます。桁を並列にした橋梁では、幅員の片側に偏って載る荷重は、橋全体を捩じります。橋桁に捻じれ剛性が小さい場合、左右の桁の曲げ変形の撓み差で見掛けの捻じれが見られます。これが曲げ捻じれです。見掛けの捻じれ剛性を高めるには、左右の橋桁間隔を広くします。桁橋全体断面をマクロに単一の部材とみると、**曲げ捻じれ剛性**を定義することができます。これは、橋断面を構成する橋桁の曲げ剛性を質点と見たときの、慣性モーメントです。このため、支間の長い橋を建設するには、相対的に主桁間隔を広げ、幅員を広くしなければなりません。実際の橋梁では、支間／幅員の比は 10 程度です。戦後(1945 年以降)、主構造に捻じれ剛性の大きな箱型断面も採用できるようになって、相対的に幅員を広くしなくても、長い支間を渡すことができるようになりました。この主構造の捻じれは、箱断面を周回する剪断流が寄与します。この捻じれに対する剛性が、単純捻じれ剛性です。箱桁の左右ウェブ間隔、つまり箱の横幅寸法は、橋全体が転倒に対して安全である幅であれば良く、結果的に、通路の幅員を箱桁側面から張り出すことができるようになりました。支間／ウェブ間隔の比を 20 程度まで大きくできますので、長大橋であっても、橋の外観がスマートになりました。

8.3.2 円柱は理想的な捻じれが生じる

細長い部材に、応力名として捻じれモーメント（トルク）が作用しているとき、断面内を周回する向きの剪断応力度と釣り合います。これが単純捻じれです。このときの仮定は、断面の平面保持です。円形のパイプ、または、内部まで充実した円断面は、剪断応力度の分布が理論的にも最も素直です(図 8.8)。捻じれ剛性は、 GK と記号表記をする習慣です。 G は剪断剛性係数、 K は捻じれ定数です。 K は、図形の回転に関する慣性モーメントの性質を持ちます。円断面では $K = \pi r^4 / 2$ です。円断面以外では、断面の剪断応力度分布の詳細は、理論的に求めることが厄介です。そのため、捻じれ剛性は実験的に求めるか、断面内部に接するような幾つかの円断面をはめこんで、その円断面の捻じれ剛性を求めます(図 8.9)。構造部材では矩形断面を組み合わせたものが、実用式は、データブックなどに紹介されています。

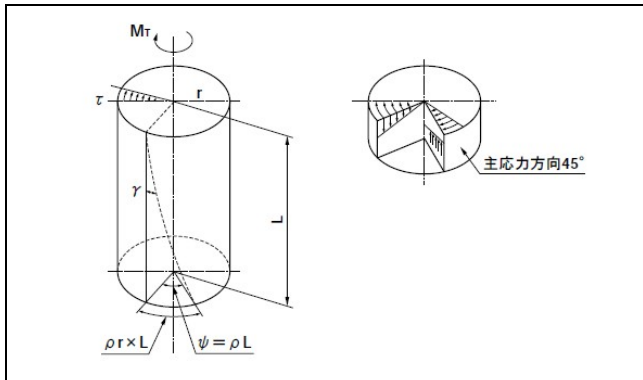


図 8.8 円断面の捻じれ

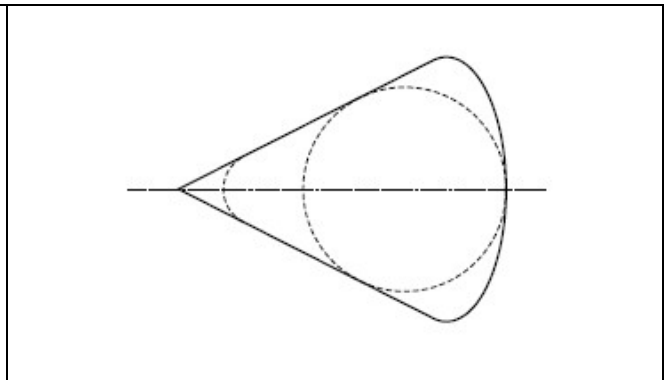


図 8.9 一般的な断面の捩じり

8.3.3 中空断面は捻じれに対して効率的である

トルクと釣り合う部材断面は、図形の外周を周回するような剪断応力度と釣り合いますので、断面内側を除いた薄肉のパイプ状にすると断面積の節約になります。この断面の特徴は、一定の剪断流が、薄板の厚みを流路とするように流れます。したがって、剪断応力度の大きさは板厚に逆比例します(図 8.10)。剪断流 q の、図形重心に関する能率(モーメント)がトルクと釣り合います。これは面積積分ですので、式 8.1 で求められます。

$$q = t\tau = T/2A \quad \dots(8.1)$$

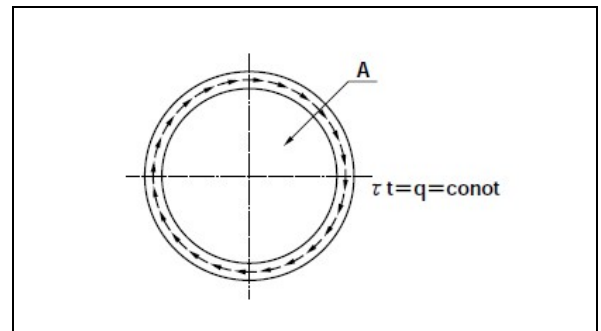


図 8.10 薄肉のパイプ構造

8.3.4 円断面以外は反りが出る

パイプ状の薄板部材（薄肉部材）を、軸方向の一つの稜線にそって切り開いた展開図を考えて下さい。最初、その展開図は、全体として矩形です。トルクを受けると、薄板各部分は、剪断応力度によって平行四辺形に変形し、その角度が γ となります。展開図にすると、図 8.11 のように、縦の稜線は平行ですが、上下の断面線は曲線（図 8.11 では折れ線）を描きます。これは板厚が異なる場所では、剪断応力度 τ が異なるためです。そうすると、元のパイプ断面の図形で見ると、軸方向に変位、つまり、反りが出ます。パイプ断面の捻じれは、周回する薄板の、剪断変形分の歪みを速度とする運動量の、回転中心に関する能率（モーメント）の総和で求めます。これから、パイプ断面の捻じれの二次モーメント K が得られます。 t は板厚です。

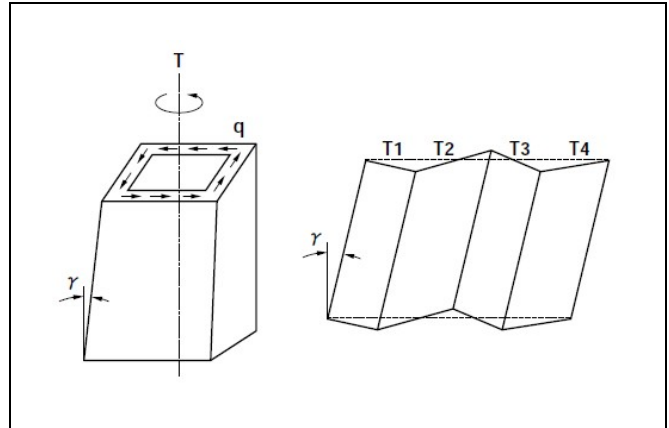


図 8.11 パイプ断面の捩じりによる反り

$$K = 4A^2 \int \frac{1}{t} ds \quad \dots(8.2)$$

一方、図 8.12 にみるようなH断面は、**開いた断面**と言います。こちらは、剪断応力度による反りではなく、リボンのような薄板が螺旋を描くことによる幾何学的な反りです。薄板は長さの長い矩形断面です。その単純捻じれの定数は

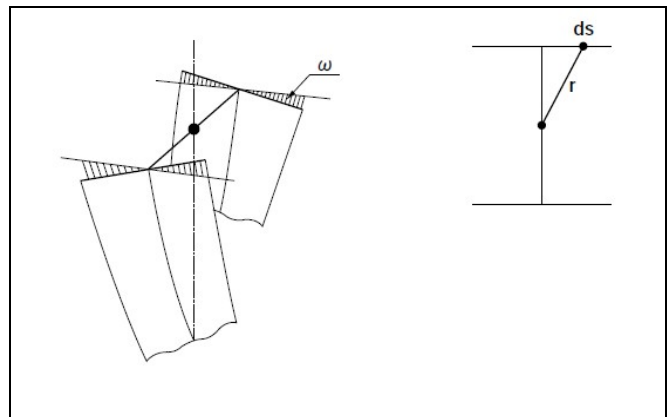


図 8.12 開いた断面の捻じれによる反り

$$K = \int \frac{t^3}{3} ds \quad \dots(8.3)$$

8.3.5 薄肉断面の反りは二種類ある

マクロに薄肉部材を細い線状の部材として扱っても、ミクロに見れば板要素の集合構造物です。平面保持の仮定からのズレが反りです。捻じれを受ける薄肉断面の反りは、第 8.1 節で扱った剪断歪みの累積だけでなく、立体幾何学的な要因で起こる反りがあります。図 8.12 は、その発生の原理を説明したものです。断面が軸方向に捻じれ率 ρ で捻じれているとき、この断面の反りは、次の概念式で表されます。

$$w = \int \frac{\tau}{G} ds + \rho \int r_n ds \quad \dots(8.4)$$

ここに $r_n \times ds$ 、板幅方向の微小長さの部分の、回転中心に関する能率（モーメント）です。図 8.11 のパイプ断面（閉じた断面と言います）でも、幾何学的な反りがあります。これは、図 8.11 の右の図で破線で示した線です。この反りは、断面を一周すると、反りが元に戻りますので、幾何学的な原因によって生じる反りの大部分が打ち消され、剪断応力度による歪みが反りの主要な要因です。一方、図 8.12 のH断面は、開いた断面ですので、板幅方向の剪断歪みによる反りは小さく、幾何学的な原因による反りが主役になることが理解できると思います。捻じれを受けるこの部材端を別の部材と繋ぎたいとき、この反りを拘束し、断面図形が平面を保つように接続すると、接続箇所に大きな局部応力度が発生することが予想できます。H形部材のフランジ部分は、捻じれは板面内の曲げを受けることが理解できると思います。実際の構造物の詳細設計では、意図的に剛な接続を避ける構造も見られます。このような幾何学的な反りを考えて解析することは、航空機のような薄肉部材の座屈を考えるとときに必要になりました。この先駆的な研究は**ワグナー**（H. Wagner）でしたので、サンブナンの捩じりと対応させる意味で、この捻じれをワグナーの曲げ捻じれと言うことがあります。曲げ捻じれを考えると、曲げ剛性を EJ と表すことに似て、曲げ捻じれ剛性 EC を計算します。この計算式も概念式の紹介に止めますが、 $\rho = 1$ の場合の反りからの弾性エネルギー式の形になります（後の第 8.4.3 項も参照して下さい）。

$$EC = E \int w^2 t ds \quad \dots(8.5)$$

8.4 剪断流の不静定問題

8.4.1 非対称の箱桁断面の剪断中心

図 8.13 に、具体的な寸法を持った箱桁断面を計算例題として使って、ここでの問題を説明します。この断面の、図形としての重心位置、断面二次モーメントは、第 4 章で紹介した方法で計算することができます。曲げモーメントによる各部の応力度の計算も、問題がありません。しかし、両側のウェブは、二つの桁を繋いだと見ることができますが、箱桁全体に掛かる剪断力を、左右のウェブで分担する割合が不静定です。つまり、第 7.3 節で解説した剪断中心の位置と、重心の位置とは同じになりません。これを解く条件は、箱断面の剪断応力度から、箱断面を一周して反りが元に戻ることです。最初、仮に断面の中心を剪断力の作用線が通るとして、左右のウェブには等しい剪断力を割り振ります。この状態で、箱断面を一周する反りを計算します。この反りが 0 でなければ、単純捻じれ相当の一定剪断流による反りで打ち消すようにトルクを加えます。理屈はそうですが、これも具体的な数値計算に使う代数式を提案するよりも、手計算の感覚を生かして計算手順を組み立てるのが実践的な解決です。この章の始めに紹介したように、以下に例題の数値計算をまとめました。

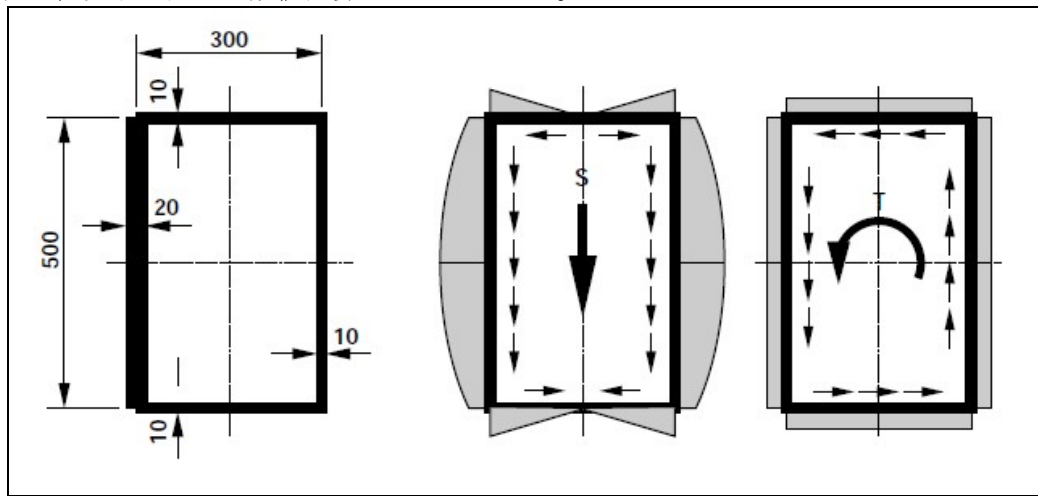


図 8.13

(i) 垂直方向剪断力による剪断流と剪断流量の計算

剪断流は、フランジ中央で 0 とした計算

番号	板幅 b (cm)	板厚 t (cm)	縦距 y (cm)	$\Delta q = bty$	Σ q	区間	面積積分式	剪断流量 Q = (cm ⁴)
2					0			0
1	15	1.0	25	375.0	375.0	2-1	$375 \times b/2$	2813
4					375.0			
5	25	2.0	12.5	625.0	1000.0	4-5	$375.0 \times b$	19792 (*2)
6	25	2.0	-12.5	-625.0	375.0	5-6	$+625 \times b \times 2/3$	19792 (*2)
10					375.0	10-11	$25 \times b/2$	2813
11	15	1.0	-25	-375.0	0			
2					0			
3	15	1.0	25	375.0	-375.0	2-3	$375 \times b/2$	2813
7					-375.0			
8	25	1.0	12.5	312.5	-687.5	7-8	$375.0 \times b$	14583 (*2)
9	25	1.0	-12.5	-312.5	-375.0	8-9	$+312.5 \times b \times 2/3$	14583 (*2)
12					-375.5	12-11	$375 \times b/2$	2813
11	15	1.0	25	-375.0	0			
					(*1)		$\Sigma (*2) =$	68750 (*3)

備考(*1)：剪断流は、箱断面を左回りに流れる向きを正としました。

備考(*3)：ウェブ部分の和が、断面二次モーメント J_Y です。

(ii) 重心と剪断中心の計算

断面	面積 (cm ²)	横距 x (cm)	Q	区間	剪断流量	偏心距離 r (cm)	回転モーメント
							左回り
300×10	30	0	0	4-5	19792	15	296800
500×20	100	-15	-1500	5-6	19792	15	296800
500×10	50	15	750	7-8	14583	-15	-218745
300×10	30	0	0	8-9	14583	-15	-218745
Σ =	210		-750		Σ = 68750		Σ = 156110

重心 $x_G = -750/210 = -3.6$ cm; 剪断中心 $x_S = -156110 / 68750 = -2.3$ cm

(iii) 剪断流と剪断流量の計算

垂直荷重分 ($S_y = J_y = 68750$)						トルク荷重分 ($T = 3000$)		
番号	板幅 b (cm)	板厚 t (cm)	区間	剪断流量 Q = (cm ⁴)	反り増分 Q/t	捻じれ分流量 q	Q	反り増分 Q/t
				0		1		
2						1	15.0	15.0
1	12.5	1.0	2-1	2813	2813	1		
4						1		
5	35	2.0	4-5	19792	9896	1	25.0	12.5
6	35	2.0	5-6	19792	9896	1	25.0	12.5
10	12.5	1.0	10-11	2813	2813	1	15.0	15.0
11						1		
2						1		
3		1.0	2-3	-2734	-2813	1	15.0	15.0
7						1		
8		1.0	7-8	-14583	-14583	1	25.0	25.0
9	20	1.0	8-9	-14583	-14583	1	25.0	25.0
12						1		
11		1.0	12-11	-2734	-2813	1	15.0	15.0
				反りの差 =	-9374		反りの差 =	135

$T = 2A \times q = 2 \times 30 \times 50 \times 1 = 3000$; 反り補正のトルクに必要な $q = -9374 / 135 = -69.4$

(iv) 鉛直荷重 $S = 1000$ kgf が剪断中心に作用する場合の剪断応力度

番号		q の補正	剪断応力度 $\tau = qS/Jt$
2	0	69.4	1.00
1	375.0	444.4	6.46
4	375.0	444.4	3.23
5	1000.0	1069.4	7.78
6	375.0	444.4	3.23
10	375.0	444.4	6.46
11	0	69.4	1.00
2	0	69.4	1.00
3	-375.0	-305.6	4.45
7	-375.0	-305.6	4.45
8	-687.5	-618.1	8.99
9	-375.0	-305.6	4.45
12	-375.5	-305.6	4.45
11	0	69.4	1

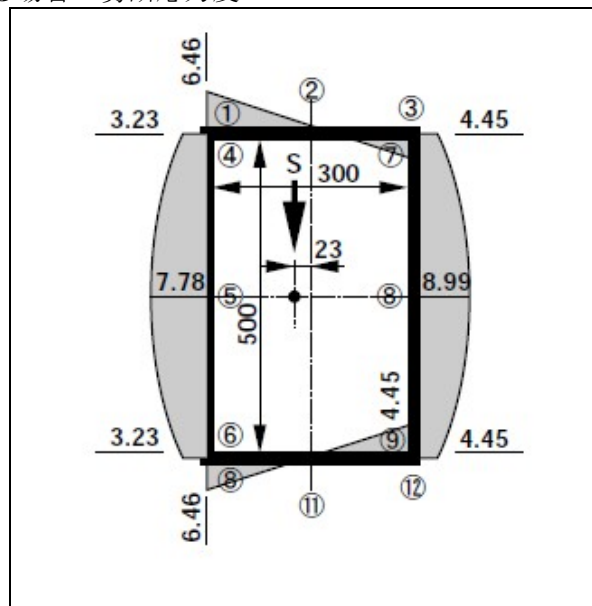


図 8.14 剪断応力度の分布

8.4.2 二箱断面の場合の不静定問題

前の項は、一つの箱桁ですが、腹板（ウェブ）が左右にありますので、ミクロに見れば2主桁で構成された構造になっています。ウェブが受け持つ上下方向の剪断力分は、単純な比例配分では計算できなくて、反りの条件を考えました。ここでは、さらに複雑になった断面として、図 8.15 に示すような、中央に追加の腹板のある二箱桁断面を考えてみます。左右対称で、腹板の板厚がすべて同じであれば、中央に荷重が載れば、腹部が三等分の剪断力を受け持つではありません。これを解析するには、前項と同じように、箱断面を一周するときの反りが元に戻る条件を必要とします。実は、前項の例題は、この説明にも使うことを考えたものです。図 8.13 の断面で、左右反対にして繋ぎあわせると、腹板厚がすべて 2cm になった二箱桁断面になります。図 8.14 の腹板の剪断応力度は、中央の腹板が左右の腹板よりも大きく計算されていることが分かります。なお、単純な捻じれを受ける場合、中央の腹板は剪断流が打ち消され、剪断剛性には殆ど寄与しません。

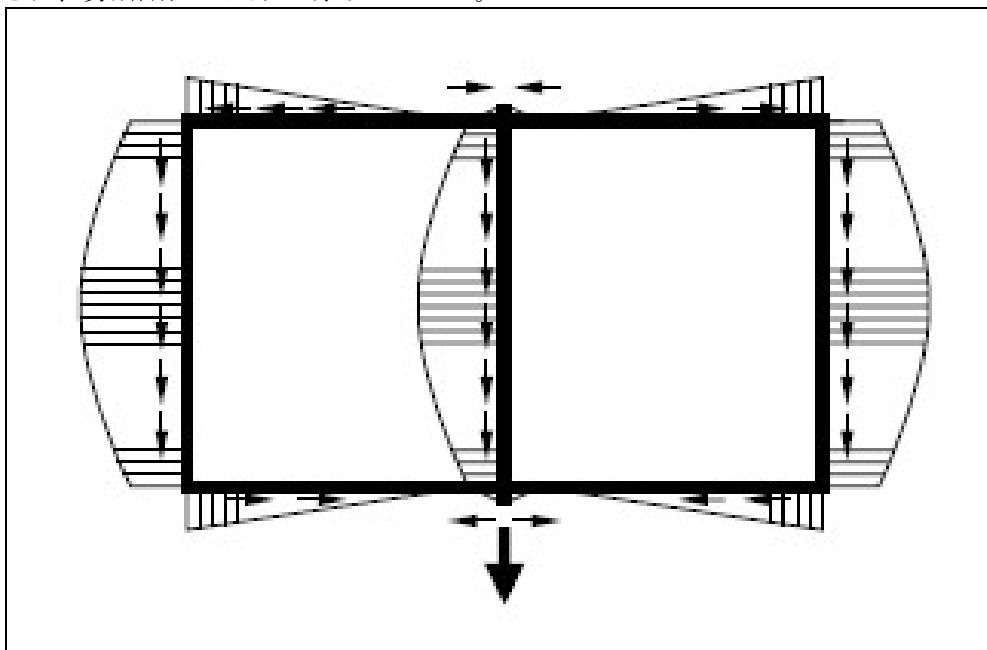


図 8.15 二箱桁で作成する複合断面

8.4.3 構造物として解析する場合の曲げ捻じれ

部材断面の応力度分布を解析するとき、部材の長手方向によって応力度の大きさが相似形の分布のまま変化すると扱えない場合は、材料力学の課題ではなく、構造力学の課題とするのが適当です。材料力学の課題は、微分的に考えた長さを持つ構造部材とします。部材断面の寸法を捨象して、細い線状の部材として構造物の構成に使います。このとき、構造線の幾何学的な形状（直線か曲線か）の属性と同時に、線の接続と支持方式が関係します。例えば、矩形断面の梁を単純支持した状態では、支点で少なくとも4ヶ所で支えますが、これは捻じれ変形にたいして両端固定の境界条件です。支点位置は、矩形断面の下縁にあって、矩形断面の重心軸の高さ位置、さらには捻じれ中心の位置ともずれる場合があります。第 8.3.1 項で曲げ捻じれのことを触れたとき、これは構造力学の課題とする方が適していると紹介しました。例えば、二主桁橋の設計をするとき、横桁の剛性を大きくして、橋桁全断面を一つの棒部材に置き換えて解析したいとします。偏心荷重による左右の桁の撓み差は、主桁の剪断力の負担の割合に比例します。左右の桁個別に捻じれ剛性があると、捻じれ角が小さくなり、剪断力の負担が等分に近づきます。そうすると、橋の長さ方向で、主桁個別に伝達する剪断力の分布が変化します。これを解析する力学モデルは、単純捻じれ剛性 GK と曲げ捻じれ剛性 EC を持った棒として、捻じれ角 ϕ を変数として、下に示す微分方程式を扱います。ここに $m(x)$ はトルクを作用させる外力です。

$$EC \frac{d^4 \phi}{dx^4} - GK \frac{d^2 \phi}{dx^2} = m(x) \quad \dots(8.6)$$

この式の応用に関しては、具体的な桁橋の設計問題を解析するときに採りあげますので、この章ではこれ以上の説明を省きます。参考には下の URL を見て下さい。

<http://www.e-bridge.jp/eb/tcontents/yasasikunai/top.php>

9. 材料の破壊と部材の破壊

9.1 材料試験の計画と結果の見方

9.1.1 材料試験をする意義を理解しておく

材料力学は、実際の材料の強度試験を元に、その結果を応用して材料の合理的な使い方を提案する学問です。強度を測定する実験法と実験技術を踏まえた上で、実験結果を説明する力学モデルを考えます。この力学モデルは、理論的な扱いを便利にする仮説です。先入観的な理論が先にあって、それで実験結果を説明したいとするのは、天動説のような、言わば宗教的な思い込みであって、科学的態度ではありません。なるべく先入観なしに実験をし、注意深く観察することが基本です。その道具として、精密な強度試験機の製作、実験法、結果の解析法が研究されてきました。欧米の科学技術に多くを学んだ時代、実験の手間を省いて、既に提案された知見を利用することができました。実験的な研究は、言わば汚れ仕事が多くなります。材料力学の研究は、強度の現れ方の方に主眼を置きますが、広く、材料に関する科学一般は、実験技術の研究開発の上に成り立っています。若い研究者は、材料と生で付き合う実験研究を敬遠し、机の上で作業するコンピュータの利用が研究であると錯覚する傾向があります。コンピュータの利用知識も一つの素養として弁えた上で、実験研究にもっと興味を持ってもらいたいところです。

9.1.2 吉田徳次郎について

日本のコンクリート工学の基礎を築いた学者の一人は、吉田徳次郎です。アメリカに学び、徹底して実験研究を貫きました、この研究態度に対して、一部の欧米崇拜の学者は、理論が無いと言って軽蔑しましたが、実際の現場技術者からは、圧倒的な信頼と尊敬が寄せられていました。コンクリートの強度は、打ちこみから24時間、三日、七日、一か月、三か月、一年のような長期間の区切りで経過を測定します。多くの試験体を扱うとなると、強度試験をする日が土・日・祭りと重なります。結果的に、一年中、実験に明け暮れることになります。現代の労働環境で、週5日制の作業条件を守るように制限すれば、このような実験研究の日取りを計画することが、建前上、不可能になってしまいました。

(写真解説：1954年頃、岐阜市長良川橋架設現場での撮影、撮影者不詳)

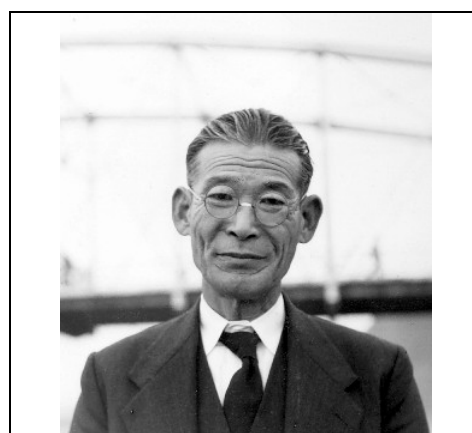


図 9.1 吉田徳次郎(1888-1960)

9.1.3 材料試験機の原理

材料試験に使う試験体は、多くのデータを得るために個数が必要です。あまり寸法を大きくしない、標準的な寸法を決めておき、多くの試験結果を統計的に比較できるように基準を決めます。標準的な試験機は、材料試験体に、引張・圧縮・曲げなどの载荷ができる装置です。通称で万能試験機(universal testing machine)と言います。荷重の大きさと変位の関係を作図するレコーダも付属しています。これで得られたグラフが、材料の「応力度・歪み曲線：stress strain curve」として参考書などに示されている図の原形です(図 9.2 参照)。数学モデルを考えて作図したものではありません。試験機の生命は、荷重を作用させる方法と、変位と荷重の精密な測定装置にあります。変位の計測は長さの測定ですので、従来からの計測装置を応用できます。荷重の载荷方法とその大きさの精密な測定には種々の工夫が必要です。戦前までは、欧米の試験機を輸入して使いました。特に有名な会社名がスイスのアムスラー社(Amsler)でしたので、万能試験機のことをアムスラー式試験機とも言います。材料試験は、一種の破壊作業です。試験機の利用は安全上の対策も考えます。強制的に変位を加えていき、そのときの反力を測定する方法で荷重の大きさを計測します。変位を加える装置として、普通、油圧ジャッキが使われ、油圧を計測して荷重に直します。機械的にネジを締めて変位を加える試験機もあります。荷重の大きさを精度よく測る方法に工夫が必要です。錘を順に増やしていく载荷方法は、錘の重量が正確に分かりますが、連続的な秤量が得られませんし、危険になったときに錘を除く操作が間に合わなくなることがあります。実物の橋梁の耐荷力を検査するため、重量車を載せる方法もあります。しかし、一つ間違えると歯止めの利かない崩壊を招きます。石橋を叩くと言う諺の裏に、この危険が意識されています。以前は、荷重を台秤の原理で測る装置もありましたが、操作性が劣ります。アムスラー式は、油圧を正確に制御し計測する方法に独特の工夫があります。

9.1.4 ニュートン単位系への移行による混乱

理論的に言うと、力は、質量×加速度の単位を持ちます。力は、重力に換算すると理解し易いので、万能試験機の秤量表示を重量単位(kgf, tf など)とするのが普通でした。アムスラー式の試験機は、てこの原理で錘の重量を制御して荷重と釣り合わせる計測法を採用しますので、重量単位の計測機です。土木・建築構造物の強度計算では、荷重が殆ど重量ですので特に問題としません。しかし、厳密に考えると、重力の加速度は場所によって変り、地域差で最大約 0.5%の誤差を含みます。空気の浮力も考えると、高度や気圧によっても重量は変ります。試験機の秤量表示をニュートン単位にすることは理論の立場からは合理的です。しかし、構造物の実務的な設計現場では、重力加速度の変動を考えに入れるほどの精密さを必要としません。理論的な意義は認めても、材料の計量(例えば、こちらは質量 kg)を重量計算(kgf は重量単位の意)に応用するとき、わざわざニュートン単位に変換することは煩わしいのです。このことに関しては、学識経験者の論理を採用して設計基準を制定する学会の責任は大きいと言えるでしょう。実践的な扱いは、呼び数(nominal number)と名目的な単位名を使うことです。英語では物質名詞の計量に、例えば「a cup of water」の言い方があります。これは、コップを計量単位にした言い方です。日本在来の計量単位の尺貫法や、英米のフィートポンド法も、物質名詞の計量単位と解釈して使うのが実用単位として使い易いと筆者は考えています。ただし、学術論文の中では、数量的な大小比較をするとき、理論的な根拠に基づく単位系を使う必要性があります。

9.1.5 強度と強さとの言葉の使い分け

材料の**丈夫さ**、**強さ**と言うときは、寸法や力の掛け方違いなども含めた広い意義で言い、相対的に大きさの程度を言います。あまり意識はしないようですが、日常の用語として、丈夫さは、実用的な許容範囲での大きさの意味があり、強さは最大値の意味を持って使い分けています。工学的に応力の**程度**の大きさを言うときは、材料の単位断面積に作用する力(**応力度**)に換算します。最も分かり易い力の掛け方は、細長い材料を引っ張るときであって、例えば鋼材で言えば、降伏点が丈夫さの指標であり、破断時の応力が強さです。鋼材の強度と言うときは、引張強さとほぼ同義です。尤も、力学モデルに利用するときは、降伏点強度、破断強度と使い分けることもします。理論的に定義する応力度は、材料の微分的に考えた単位断面積に作用する力です。引張試験で破断するときは、伸びによって断面積が次第に小さくなり、元の断面積ではなくなっています。材料試験の結果を言うときは、意識的に強度の用語を使わないで、引張強さと言います。圧縮試験や曲げ試験などでは、応力度の分布が単純ではありません。例えば、セメントの強度試験は、4 cm×4 cm 断面寸法で長さ 16cm の梁をモルタルで製作します。最初、曲げ試験をして、折れた部分について圧縮試験をします。データの整理では強度の用語を使わず、曲げ強さ、圧縮強さと言います。実験的に得られた強さから、理想的な応力状態での強さを、引張強度、圧縮強度、剪断強度などに整理して設計時の力学モデルに使います。

9.1.6 破壊と崩壊の定義

漢語の**破壊**(destruction, wreck)は、種々の場面で使われる普通の用語です。材料力学で使う場合は、力を伝える目的に使っていた耐力機能が低くなるか、**変形**が大きくなって元に戻らなくて、役に立たなくなる状態を指し、英語は failure です。力と変形の範囲が材料の弾性範囲を超えるときを、破壊の始まりとします。破壊の現れ方は、荷重の加え方と、材料の形状や寸法などに関係した材料内部の応力度の分布によって変ります。細長い試験片を使う引張試験は、最も分かり易い破壊を示します。鋼材の引張試験をすると、或る応力度を超えると、荷重を抜いても伸びが元に戻らなくなります。これを**降伏点**(yield point)と言います(図 9.2 参照)。荷重に対して、まだ、そこそこの抵抗力は残っています。実際の構造物の部材では、変形もそれほど進んでいなければ、応急処置か、修理の対策ができます。しかし、破断は変形が無限大になることですし、力を伝える機能も完全に失われます。これには漢語の**崩壊**(collapse)を当てます。崩壊は、応急的な対策も、元に戻す修理すらできない破壊の意味を持ちます。一方、高さの低い圧縮材で圧縮試験をすると、圧縮によって断面積が増え、潰れても、高さ全体が無くなる変形を起こしません。また、圧縮力も大きくなります。圧縮力を伝える機能も残っていれば、崩壊とは言い難いところです。これは部材としての話しです。構造物は部材を組み合わせます。これを構造システムと見ることもします。このシステムで、どこかの構成部材が破壊したとき、全体システムとして機能の低下で済み、修理が可能な破壊と、機能が失われる崩壊に進む場合とがあります。構造物の安全性を議論するとき、最も恐れられるのが崩壊の方です。

9.1.7 引張試験が示す材料の性質

材料の強さとは、基本的に引張強さです。砂や砂利は引張強さが有りませんので、構造材料として使うことができないと思ひ込むのは誤解です。圧縮応力状態で使います。細長い試験片を作つて引張強さを試験したいとき、試験片を啜える端の部分の構造に工夫が必要です。金属材料は、この端で、横から試験片を締め付け、摩擦力を利かして引張力を伝えるのが普通です。**脆性**材料は、この端部分で局部応力度が大きくなる原因で破壊し、本体の強度試験にならないことが起こります。試験片の形状を、中央でくびれた砂時計のように製作して、引っ掛かりで持たせるアイディアは、コンクリートやセメントモルタルで試みられたこともありましたが、しかし、試験片の製作に手間が掛かりますので、実用試験法になりませんでした。材料を引張応力状態にすると、全体の体積は減少します。材料強度が或る限界に達すると、体積減少が止まり、強度はそのまま体積減少のない変形状態に移ります。これが**塑性**変形です。通常は、部材内部でマイクロの迂り変形が起きています。脆性材料は、迂り変形能が低い材料です。強度が最大になった時点から、僅かに変位が増加したところで破断が起きます。後先になりますが、脆性と塑性の定義は、後の9.1.10項で説明します。

9.1.8 構造用鋼材が示す特異な性質

鉄は、強度に期待するだけでなく、電磁気材料などにも使われる、用途の広い金属材料です。その性質は、化学的な他成分の割合、熱処理、結晶成分の構成や配列、などに影響されて多様です。一般的な構造物に使われる鋼材料は、ほどほどの強度と共に、製作・架設作業を考えて仕様が決められています。強度が大き過ぎれば、工場での機械加工を特別に計画しなければなりません。加工には、或る程度の**伸び**、つまり塑性変形能が必要です。その大きさは、引張試験をして、約20%が要求仕様です。なお、母材と同程度の強度が保証できる溶接ができないと、複雑な構造構成ができません。構造用鋼材の処女材料の引張試験をすると、図9.2のような応力度・歪み曲線を試験機のレコーダが描きます。**降伏点**に達すると、試験機の荷重が僅かに下がり、塑性変形が起こったことが分かります。さらに強制的に変位を増加させると、荷重が上がって行き、最大荷重を幾らか過ぎたところで破断します。この試験の途中で、荷重を抜くと、図9.2の点線のような弾性的な力と変形の道筋を取り、歪みが0には戻りません。再び荷重を加えていくと、点線にそって帰り、道草を食ったように、残りの応力度・歪み曲線を辿ります。道草の行き帰りは、弾性的な性質を示します。この性質を利用すると、同じ材料であっても、降伏点の高い部材が得られます。しかし、伸びが犠牲になります。鋼の線材は、**引き抜き**と言う引張加工をして製作しますが、この線材は、材料内部の結晶構造の配列が変って、降伏点上がり、強度も上がります。これは鋼材固有の性質であつて、他の材料、例えばアルミニウム材では見られません。アルミニウムの力と変形の関係は、模式的に示すと、図9.3のような、降伏点を超えると平らな塑性変形を描きます。この性質のため、アルミニウムの棒や線材は、**押し出し**加工で製作されます。鋼材の場合にも、強度を計算するモデルは、図9.3の力学モデルを仮定し、これをもとに部材としての応力・変形のモデルを立て、設計に応用します。これが塑性設計です。

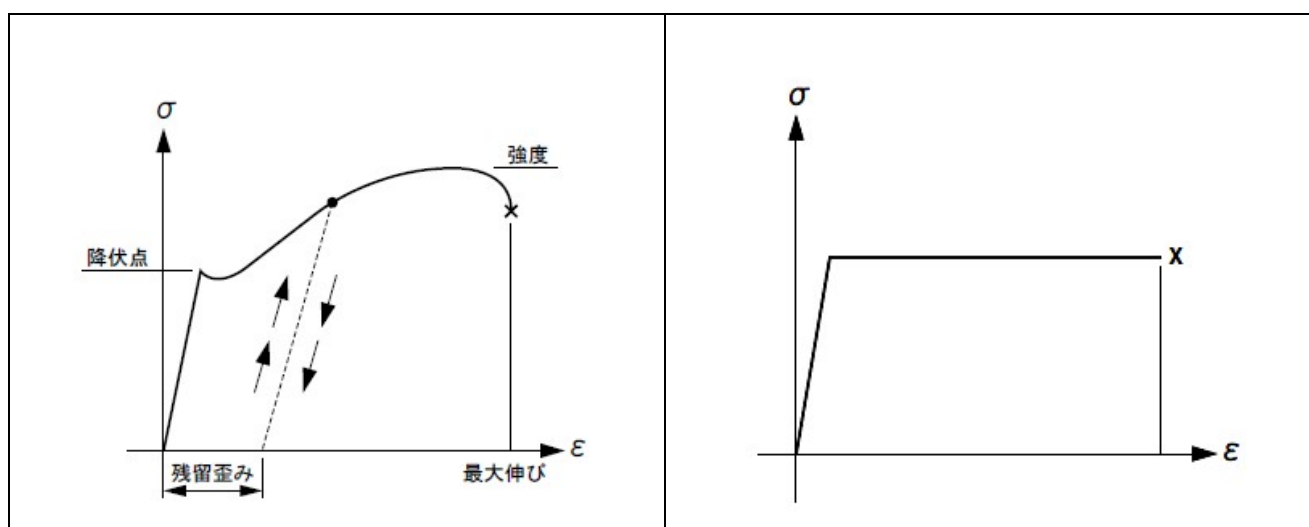


図 9.2 軟鋼の引張試験のグラフ

図 9.3 理想的な金属材料

9.1.9 接着剤の強度は剪断強度で言う

接着剤と言えば、エポキシなどの合成樹脂系の材料をまず考えます。コンクリートは、セメントペーストを接着剤として砂利や砂を結合して連続体にした材料です。セメントペーストに代えて融点の高いアスファルトを使うときはアスファルトコンクリート、合成樹脂を使うときはプラスチックコンクリートのように言います。接着剤が固まるメカニズムが化学反応であるものは、この過程で熱がでますので、**熱硬化性接着剤**と言います。アスファルトは熱を加えると液状になることから、**熱可塑性接着剤**です。プラモデルに使う合成樹脂がそうです。価格の高い接着剤の量を節約するため、埋め物に使う材料を**骨材**(aggregate)と言い、コンクリートは、砂利や砂を使います。塗装に使う場合は、顔料が骨材です。強度に期待する使い方をする接着剤を、構造接着剤と言います。粘着テープや、紙の接着につかう糊は、強度を持たせると硬くなり過ぎて、使い勝手が悪くなります。構造接着剤の強度試験は、二枚の板を重ねるように接着剤で繋ぎ、その面に平行な剪断応力での強度を測定します。引張強度の試験ではありません。接着剤単独では剪断強度があっても、接着させたい対象との相性が悪いことがあって、引張強度には期待しないように使うのが原則です。剪断応力の場合にすると、対象物の表面を粗く加工しておいて、機械的な引っ掛かり、つまり、摩擦を利かせる、などの実践的な方法が採られます。鉄筋コンクリートに使う異形鉄筋は、この効果を考えた材料です。コンクリートの骨材だけの集合は、内部摩擦を持った構造材料ですので、セメントペーストで隙間を埋めることで、実質的な剪断強度の大きな材料になります。ただし、理想状態で引っ張る使い方に対しては、強度の向上には繋がりません。

9.1.10 塑性・脆性・粘性

材料が破壊される時、引張破断は連続性が断たれる場合です。繋がったままで形が変わる場合もあります。前者の破壊の極限は、岩石のような連続体が割れて行く過程がそうです。これを**ぜいせい** (**脆性**: brittle) 破壊と言います。対照的に、破断が起きないで、大きな変形に対応できる性質を**そせい** (**塑性**: plastic) と言います。粘土のような性質です。金属材料では、延性と展性の用語を使います。石材やガラスなどは、脆性材料です。引張応力の場合で降伏点を超えると、変形が追いつかなくて破断またはひびきが発生します。この材料は、引張強さが圧縮強さに比べて低い材料であって、力学的には、引張強さが剪断強さとほぼ同じ大きさを示します。ひびきは、体積変化がなくても、相対的にズレの大きな変形を起こします。地震のように、地下深くで、体積変形の自由度が無い個所でも、部分的に起こる変形です。一方、塑性材料は、降伏点を超えると、ミクロの分子または原子レベルで材料内部にひびきが生じて、変形に対応します。金属材料では、これを**転位**(dislocation)と言います。転位が生きてても、原子または分子間の結合力が働きますので、引張強さが保存されます。乾いた砂は、全体をマクロに見れば引張強さの無い連続体です。**粉体**または**粒体**と分類することがあります。**流体**のような性質もありますが、或る角度(安息角)の斜面を持たせて積み上げることができて、その上に重量物を載せられる静力学的な強さを持ちます。これは、摩擦を持った斜面と似た性質ですので、**内部摩擦**があると言います。摩擦と剪断とは、静力学的には似たところがあって、力を伝える作用を助けます。砂は、水気があると、海水浴の海岸で砂山を作ってトンネルを掘ることができるような、見掛けの引張強さを示します。これは、粘着力または付着力が効くようになったためです。これが粘性です。土材料は、粘性を持った粉体としてモデル化します。

9.1.11 クリープとリラクゼーション

塑性は、或る力以上になると、見掛け上の流動性を示す性質を言います。個体と流体との中間状態を扱う材料科学一般にレオロジー(rheology)があります。水飴が典型的な例として一般的な説明に使われます。これには温度や時間的な要素も考えます。或る状態では固体の性質が勝ち、時間軸を長く取ると流体の性質が見られます。材料力学と関連する性質は、**クリープ**(creep)と**応力緩和**(**リラクゼーション**: relaxation)を扱います。力学的な定義を言うと、クリープは一定の応力が作用していると変形が時間と共に増加すること、リラクゼーションは変形を一定に拘束しておくことと応力の大きさが下がることです。実際にはこの現象が混在して現れます。主としてコンクリート構造物の施工で考えます。流体とは違いますが、或る日数が経過すれば止まります。実験技術としては、時間との勝負です。設計計算上の扱いは、換算のヤング率(reduced elastic modulus)が下がる、とするのが便利です。この計算例題は第5章で扱いました。金属材料ではクリープとリラクゼーションを直接扱うことは多くありません。材料を寝かせておくと異常な変形が進むことがあります。この現象の原因説明に使われます。局部応力度の応力緩和には、全体の温度を上げる焼き鈍し法が経験的に応用されています。

9.2 破壊の力学モデル

9.2.1 降伏点と最大強度との使い分け

定性的に言う物の強さは、同じ材料を使っても、形状・寸法・荷重の種類と載荷方法などによって破壊の状態も強さの大きさも変わります。或る条件を決めて、強さの度合いを定量的に決めるとき、材料試験の、どの段階での強さか、の言葉を補います。また、構造物の設計をするとき、強度の基準位置を降伏点に置くか、破断強度に置くかなどを問題にします。弾性設計と言う時は降伏点を考え、極限設計というときは最大強度を考えます。コンクリートのような脆性材料は、圧縮強さの方を実用的に使います。これも、試験方法によって強さの現れ方が変わります。日本では、直径 15cm、高さ 30cm の円柱供試体の圧縮実験で得られた値を基準の圧縮強度とします。正確に言いたいときは、シリンダ強度と断ります。実際の破壊の様子は、剪断破壊を示しています。シリンダ強度は、試験体の寸法が相似でも、大小違いがあると、相対的に小寸法の試験体の強度が高く得られます。また、ヨーロッパ諸国では立方体の試験体を使いますが、この強度もシリンダ強度よりも高く得られます。これらの実験強度を元にして、コンクリート構造物の設計に利用するとき、理想化した破壊モデルを考えて、圧縮・支圧・引張・剪断・付着などの許容応力度に分けて提案します。

9.2.2 寸法効果があることの説明が難しい

部材の応力度を数学的に解析をするときのモデルは、材料寸法が微分的なレベルまで均質な連続体であるとして扱います。実際の材料は、ミクロに見れば、均質な構成ではありません。コンクリートで言えば、応力度の計算に使う部材断面の平均寸法は、砂利の寸法よりも大きくみなければなりません。鋼材は、コンクリートに較べれば相対的に均質な材料ですが、それも、顕微鏡で見れば、結晶集合レベルで不均質が見られます。数学を応用して精密な解析をする目的は、微小な寸法間隔の注目点間でも応力度の分布を知りたいことにあるのですが、実際の材料内部で均質な仮定が常に成立しているとは言えません。材料の全体寸法が相似的に大きくなれば、均質性の仮定に近づくと考えられます。しかし、コンクリートの材料試験の結果は、寸法が大きくなると強度が相対的に低くなる相関が観察されます。これを寸法効果(size effect)と言います。鋼材では、同じ材質でも薄板に圧延した材料の方が相対的に強さが大きく得られます。鋼橋の製作では、許容応力度に適合させる鋼材を選択するとき、厚板の方に品質が上位の鋼材を当てます。この寸法効果を合理的に説明する理屈はまだ無いようです。一つの仮説は、「破壊は、材料内部でミクロの破壊の繋がりで大きく成長することによる結果である」とします。ミクロの破壊の種(たね)は、部材表面ならば、切り掛けのような個所であって、局部応力が大きく、亀裂が出易い個所です。種の個数は、材料内部に統計的に見て、均質に分布していると仮定します。そうであると、体積の大きい部材は、タネの個数が相対的に多くなりますので早目に破壊が進む、と仮定できます。また、寸法が小さな試験体では、強度のバラつきが大きくなることも説明できます。疲労によって材料の強度が下がっていく場合の説明も、部材内部に欠陥が蓄積していく現象と考えることができます。疲労が進んだ材料は、外見では欠陥が見られませんが、金属材料などは溶かして再生しなければ元の性質に戻りません。機械部品などは、一定の使用時間が経過すれば、未だ使用できる未練があっても、安全を考えて、新品と交換する規則を設けることもします。

9.2.3 材料の破壊は二つに分かれること

俗に、物が壊れる破断は、繋がっていた形(連続体)が二つに分かれることを指します。引張材は、破断で明瞭に二つに分かれます。石材やコンクリートのような脆性材料の梁を曲げ試験をすれば、二つに折れます。このときの強度は、主に材料の引張強さの方で決まります。コンクリートは、圧縮応力度の場になるように使えば、引張強さよりも大きな強さを示します。さらに、コンクリートの圧縮柱の回りを囲うようにすると、そうでない場合よりも大きな圧縮耐力を示します。これを支圧(bearing)と言います。一方、金属材料を曲げても、折れで破断するのは鋳物のような脆性の大きな材料であって、普通鋼材では曲がるだけで折損しません。これは塑性的な性質があるため、連続性が保たれたためです。脆性材料の破壊は、主に剪断変形で起こります。この剪断面は引張強さを持ちませんので、この面に圧縮力または付着力が作用しなければ、この面で材料が二つに分かれます。コンクリートの円柱試験体の圧縮試験をするとき、荷重が僅かに下がった時点で作業を止めると、幾らか引張強度が残っている個所が円柱全体の形を保ってくれます。このようにすると、材料試験の環境を試験片の破片などで汚さなくて済むことができます。これは、安全な実験作業をするときの、いわばノウハウ的な技能ですので、作業マニュアルなどに載ることはあっても、参考書に書かれることはありません。

9.2.4 鋼材の破壊モデル

鋼材料、一般的には金属材料、の強度は、引張と圧縮とを応力度の正負で考えるだけで同じ性質があると仮定します。鋼材は、降伏点を超えると塑性的な変形が続きます。これは、部分的に応力度が大きくなる個所を平均化して行きます。引張試験をすると、断面の応力度分布の変化が最も小さくなる、試験片のほぼ中央部で破断します。この事象の説明が、ミーゼズ(R. von Mises)の歪みエネルギー一定説です。応力度分布が一様である個所は、全体の歪みエネルギーが最小になる個所であって、そこで全体破壊が生じると考えれば、引張試験片の破断がほぼ中央で起こることが説明できます。材料が降伏点に達すると、体積変化のない変形が始まります。これはポアソン係数 ν が0.5になった状態です。鋼構造物では薄板を二次元応力状態で使うことが多いことを考えて、二方向の主応力度と剪断応力度で表せる下の式が、材料の引張試験で得られる降伏点 σ_y に達したときを、破壊が始まる条件とします。

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + 3\tau^2} \quad \dots(9.1)$$

主応力度一つと剪断応力度の組み合わせを考えると、例えば、プレートガーダーのウェブ上端は、破壊条件が下の式(9.2)のような楕円式になり、グラフに描くと図 9.4 のような楕円が破壊条件を表します。

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad \dots(9.2)$$

純粋な剪断応力の場合では剪断応力度が降伏点の0.58倍で生じる計算になります。鋼材の剪断許容応力度は、これを根拠として、引張許容応力度の約58%を提案しています。

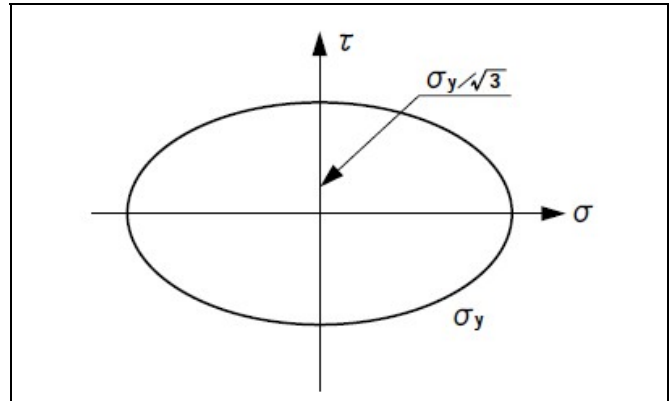


図 9.4 鋼材の破壊条件を表す楕円式

9.2.5 モール円の集合で表す破壊モデル

自然の地形を構成する岩盤の構成材料である岩石は、マクロに見れば、弾性材料の性質を持ちます。地下深くにあれば、全体が深海での水圧のように周りから大きな圧縮応力を受けて体積が幾らか小さくなります。しかし、破壊はしません。地上に現れても、眼に見えるほどの体積膨張をしません、幾らかは膨張することは知られています。トンネル工事をすると、トンネル切羽(きりは)面の岩石は自由表面になって、その面に作用していた圧縮応力が0になります。そのため、表面岩石が貝殻状に破壊してはね出ることがあります。これを山はねと言います。三次元的に連続した構造であっても、構造物の表面は応力度が0ですので、表面から或る厚さの個所までは、二次元の応力場です。部材の形状は様々ですし、破壊時の応力状態も多様です。そのため、破壊が生じたときの二次元応力状態のモール円を幾つも描いて、モール円の包絡線を破壊条件の力学モデルにします。材料の応力度の状態(σ , τ)が理論的に推定できて、このプロット位置が包絡線の内側にあれば破壊しないとします。

9.2.6 コンクリート強度のモール円モデル

図 9.5 は、コンクリートのような脆性材料の破壊条件を説明するため、モール円の包絡線を描いたものです。コンクリートは圧縮強さに期待する使い方をしますので、 σ 軸は右を圧縮応力度になるように描いてあります。左端の小円は、純引張応力で破断するときです。原点を中心とする円は、純剪断応力度で破壊するときです。右の大円は、円柱試験体を使った一軸圧縮実験の結果を表しています。引張強度と剪断強度とはほぼ等しく、シリンダ強度の約1/10程度であることが実験的に知られています。支圧応力度を考えると、柱の外周を補強して部分的な圧縮柱と考えます。自由表面で、窪みか、部分的な押し抜き剪断破壊が起きるのを避けるため、許容支圧応力度は圧縮の許容応力度の2倍程度に抑えます。

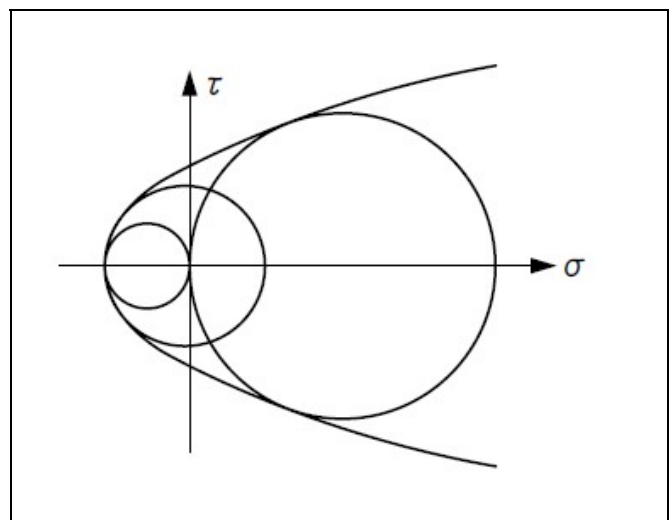


図 9.5 脆性材料の破壊のモール円モデル

9.2.7 実験技術が難しいこと

図 9.5 は、コンクリートの場合を想定して三つのモール円を描いてありますが、この理想的な応力状態を実験的に再現する方法は、技術的に難しいところがあります。シリンダ強度は、便宜的に圧縮強度として扱いますが、破壊の様子は、部分的にみれば圧縮応力の勝った剪断破壊です。二次元応力状態で純粋な剪断応力度の場を実現させる載荷方法はできませんので、純剪断応力場での強度は、純引張強度度からの推定が使われます。その純引張強度の実験も、鋼材のような直接的な試験法が採用できません。現在の試験方法は、赤沢常雄の方法が実用的に最も便利ですので、これが試験法になっています。それは円柱試験体を横置きにした圧縮実験に代えて引張強度に換算します。矩形断面の梁を曲げて破壊させる実験は、梁の下縁が引張応力の場になって、そこで破断が始まりますので、引張強度を求めていることになるのですが、荷重直下での応力状態がやや複雑になるので、強度が幾らか高めに計算されます。

9.2.8 砂や砂利のモール円モデル

砂や砂利は、強度に期待して構造材料に使うことができます。引張強度を持ちませんが、ピラミッド状に積み上げることができて、安定した斜面ができます。このピラミッドの強度を説明する力学モデルは、図 9.6 のように、モール円の包絡線が直線になります。この直線の角度が内部摩擦角です。この図も応力度の軸は、右方向が圧縮応力度を表すように描いてあります。土は、粘着力を持った砂の性格がありますので、グラフ全体が左に寄り、 τ 軸の左側は、図 9.5 のように丸みを持ちます。

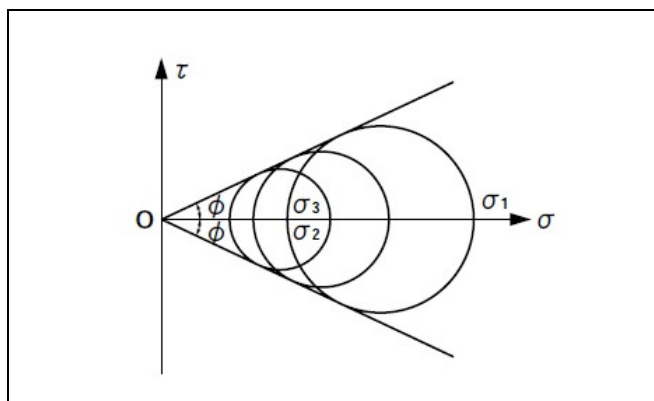


図 9.6 砂や砂利のモール円モデル

9.2.9 弾性設計法に応用するときの許容応力度

構造物の設計をするとき、応力度の大きさが或る許容値に入ることを見証して安全の確認をします。最も基本的な利用形態は、細長い部材を引張または圧縮状態で使うことです。許容応力度は、材料が破壊しない状態で使うことができる応力度の大きさを、或る安全率で割った値で決めます。安全率を幾らにするかは大きな議論ですが、ここでは触れません。実際の部材の使い方は様々ですので、部材内部の応力度の分布も様々です。弾性体の力学を応用して、引張または圧縮の応力度の最大値を求めておいて、先の許容応力度で見証します。梁の設計の場合、断面の上縁または下縁で応力度が極大になりますので、この応力度を縁応力度(fiber stress)とすることがあります。剪断応力度を見証する場面は、やや特殊です。鋼構造物では、以前はリベット継ぎ手、現在では溶接継ぎ手の寸法決定のときに必要ですので、製作時の詳細構造を決定するときに計算します。純剪断を受ける場合の許容応力度の決め方は、鋼構造物では図 9.4、コンクリート構造物では図 9.5 に基づいて決めています。コンクリート構造物の設計では、コンクリートの引張強度と剪断強度とほぼ同じ応力度の扱いをしています。鉄筋とコンクリートとの付着応力度は、力の種類としては、コンクリート側の剪断応力度と同じです。鋼材の場合、引張と圧縮とは同じ大きさで考えることができますので、純剪断の許容応力度も、引張強度の約 58% まで高めに使うことができます。しかし、例えば、プレートガーダーのウェブがフランジと接続する個所で、引張または圧縮の縁応力度 σ と、その場所での剪断応力度 τ とが共に許容応力度を満たすとしても、式 9.2 を応用した合成応力度が、図 9.4 の楕円の外側に出れば、許容応力度を超えることになります。この状態が起きないように断面設計をするのが原則です。一方、支圧応力度は、リベット構造で板に穴を空け、そこにリベット軸が当たるのが支圧の一つの現れ方です。断面の一部に圧縮応力を作用させたときの応力度です。その応力の作用断面は柱の表面ですが、断面の両側に余分の断面を持った柱になっています。そのため、支圧面に擬似的な三軸圧縮応力状態ができて、圧縮強度が高めに出来ます。これを考えたのが許容支圧応力度です。コンクリート構造で支圧応力が作用する個所は、例えば橋脚や橋台に支承金具を載せて上部構造を支える状態があります。あまり過大な圧縮力が作用すると、金具の周で部分的に剪断破壊が起きるので、支圧の許容応力度は、圧縮の許容応力度の 2～3 倍以下に抑えます。

9.3 梁の塑性設計

9.3.1 橋梁と建築物とは考え方が異なる

橋梁構造は、長大橋梁を別として、実用される中小の橋梁では、応力が最大になる条件に、自動車荷重のような活荷重が大きな比率を持ちます。実際に通行する活荷重の大きさは、道路橋では予測ができません。トラックなどの重量車には、自重と積載重量の最大に規則がありますが、それに違反する過大な重量車も通ることもあるのが現実です。つまり、応力が設計応力を超える確率は、かなり高く、その分を考えて安全率を高くした弾性設計法が採用されます。一方、一般的な建築構造の場合、設計荷重は自重が主です。設計応力の計算に使う危険の見積もりは、日本では地震荷重です。この荷重は、自動車荷重とは異なって、確実に作用する現実的な力ではありませんので、特に考えなくても済みます。設計計算で耐震計算をするとしても、気休め的に処理することも多くなります。このこともあって、自重を主に考えた場合の設計安全率は、橋梁構造物に較べて大きくしません。大地震が襲来したときの安全確保は、部分的な破壊は許しても、人命に関わるような全体の崩壊を抑える対策を考えます。ここに塑性設計法が応用されます。構造物の耐力の方で抵抗できないほどの大地震が襲来したら、材料が塑性変形をして部分的な破壊が起きることを許し、全体構造システムの崩壊に繋がらないようにする考え方です。地震対策を、力に置き換えて計算する方法を**震度法**と言い、これには弾性設計法が応用されます。超高層ビルを柔構造にして地震力を逃がす考え方は、変形も弾性範囲になるように抑えますので、弾性設計法と言えます。どの設計法がよいかは一概に断定できません。しかし、すべての構造物は地盤の上に建造されますので、耐震対策は上部構造だけで扱う課題ではありません。橋梁の場合、地盤との接続個所である橋台と橋脚の、地震時の変形や変位を抑える対策が重要視されます。

9.3.2 破壊させるときの判断に使う曲げモーメント

梁部材の設計は、弾性範囲内で使う最大曲げモーメントの大きさと、材料の応力度が塑性域まで達したときの最大曲げモーメントの二つを勘案します。通常の使用状態では、材料の応力度が弾性範囲内にあるようにし、それに対して安全率を決めます。材料の応力度が降伏点を超えるような条件は非常に特殊な場合ですが、最大、どの程度まで耐えるかの計算をし、これに対しても安全率を考えます。土木構造物の場合、前者と後者の安全率は、2と3にするのが常識です。経済的な設計を計画すると、この安全率を値切ります。この判断はかなり生臭いものです。材料力学の課題は、最大曲げモーメントの大きさの計算方法にあって、その出発に使われる力学モデルは、図9.3に示す、単純化した応力度・歪み曲線です。鋼材は、塑性的な性質があることと、引張と圧縮とは対称な性質を仮定できます。コンクリートのような脆性材料では、引張強度が低いので、圧縮応力度が未だ十分に弾性範囲にあっても、引張側に亀裂が入ると、断面の効率が下がります。

9.3.3 梁の応力度分布の経過

鋼材を使う梁に荷重を作用させ、曲げモーメントで梁が破壊するまでの経過を考えます。荷重の大きさを順に大きくしていくとき、曲げモーメントで生じる断面の応力度分布は、図9.7のように推移すると考えます。鋼材の応力度が弾性範囲内であれば、(a)のように、応力度分布は高さ方向に直線です。縁応力度が降伏点になった状態(b)以降は、縁応力度の最大値がそれ以上には伸びず、(c)の状態になります。(d)の状態は極限状態のモデルであって、弾性範囲を考えません。荷重を増やそうとしても、回転変形を増加させる仕事をするだけです。一方、脆性材料の代表として、鉄筋を使わないコンクリートの梁では、実験技術の問題があって少し複雑です。コンクリート梁の処女材料は、引張強度もありますので、最初は(a)のような曲げ応力度分布になっています。引張縁で、引張強度を超えると、その個所に亀裂が入り、引張応力度は0になります。もし同じ大きさの曲げモーメントがそのまま作用すれば、梁は亀裂が入った高さだけ断面積が減りますので、連鎖的に亀裂が進行して折損します。

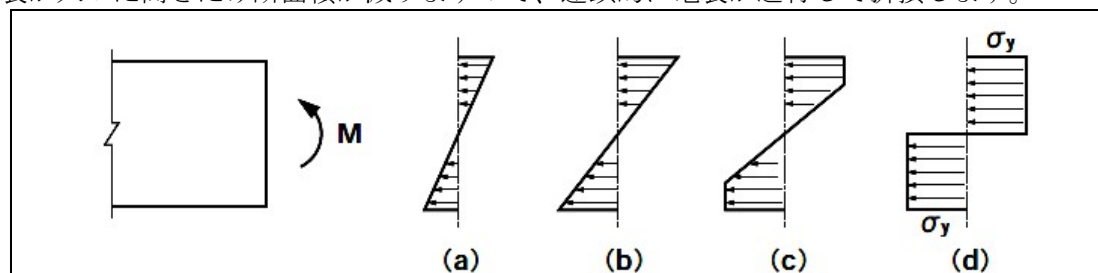


図 9.7 曲げモーメントを大きくしていく時の応力度分布の変化（鋼材料の場合）

9.3.4 鋼梁の曲げ応力と変形の関係

鋼材で作成した梁部材の曲げ試験をすると、応力（曲げモーメント）と変形（曲げの曲率）の関係は、鋼材料の引張試験の、応力と伸びの関係とは違った曲線になります。比較のため、単純化した図 9.3 のような性質を持つ素材を考えて曲げ試験をすると、図 9.7 のような、応力度分布に対応する曲げ変形が図 9.8 のようになります。図中の(a)、(b)、(c)、(d)の位置は、図 9.7 の同じ記号の位置に対応します。曲げの場合、断面の縁応力度が降伏点に達したとき、弾性範囲での最大抵抗モーメントになります(b)。そさらに曲げ変形を増やすと、材料が塑性域に入り、抵抗モーメントの増加の傾斜が緩くなり(c)、最大値(d)になります。これ以降、曲げ変形を増やしても、理論上、このモーメントのままです。この曲線は、傾向として図 9.2 と同じ性質であることに注目して下さい。

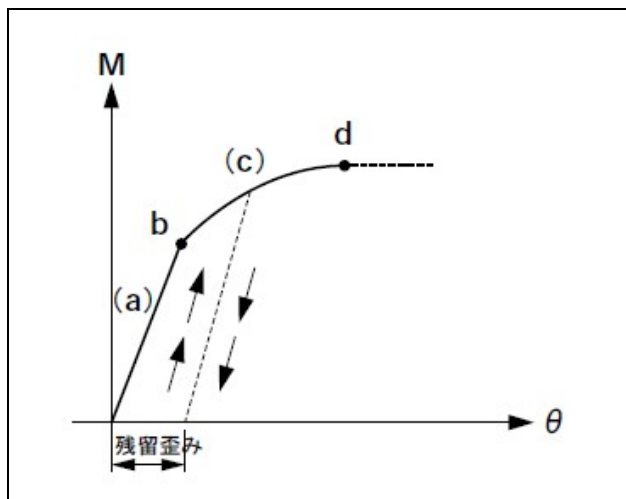


図 9.8 曲げで破壊させるときの力と変形

9.3.5 荷重を戻したときの残留変形と残留応力

いま、図 9.8 の思考実験で、途中で荷重を中止して荷重を 0 に戻したら、どのような結果になるかを考えてみます。(b)の状態までならば、梁の変形は元に戻り、断面の応力度分布も 0 です。梁の曲げ変形では、断面が平面保持されていると仮定できます。(c)の状態では、断面の上下縁は、塑性変形によって追加の歪みが三角形状の分布で追加されています。この状態から荷重を抜き、また加えていくと、断面の曲げ応力度の分布は、弾性範囲の曲げ応力状態(a)が符号を変えて作用する弾性変形を示します。これを図 9.8 の点線の軌跡で示しました。荷重を 0 に戻したとき、曲げ変形は 0 には戻りません。断面の高さ方向の応力度分布は、図 9.9 のように残ります。

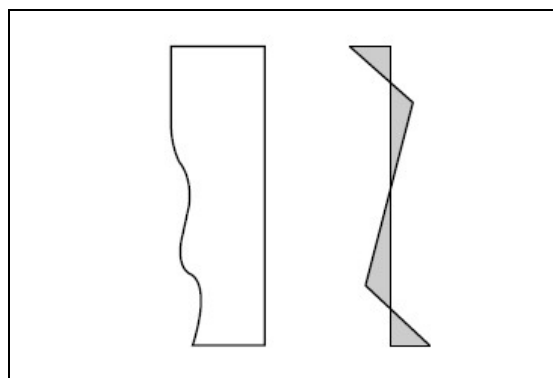


図 9.9 塑性的な曲げによる残留応力度

9.3.6 連鎖的な破壊を止める方法

自然の石材を使った簡単な桁橋は、特に珍しい構造ではありません。亀裂が見つかる場合もありますが、人が渡る程度の使い方であれば、折れそうな兆候を感覚的に察知できます。試験機を使って注意深く曲げ試験をすれば、折損する寸前で試験を中止することができます。この章の始めに説明したように、試験機の原理が、変位を加える方法を採用しているためです。ゆっくりと変位を増加させていくと、曲げモーメントが増加していきます。梁に亀裂が僅かに発生したとき、荷重が下がるの見逃さなければ、実験を停止して、亀裂の進行をそこで止めることができます。ただし、いつも成功する保証はできません。もし、錘を載せていく試験方法を取るか、変位させる速度を速くすると、亀裂の進行を止める間もなく、折損が起こります。鉄筋コンクリート梁の曲げ試験をすると、コンクリートに亀裂が入った時点から鉄筋が引張応力度を肩代わりして、亀裂が高さ（深さ）方向に進行するのを抑えます。鉄筋コンクリート梁の弾性設計に使う力学モデルは、引張側になるコンクリートの寄与を無視し、引張応力はすべて鉄筋で持たせます。圧縮側のコンクリートは、応力度と歪みが比例すると仮定します。これは、応力度と歪みのグラフが、圧縮から引張に変わる個所で折れ線になりますので、数学的非線形であると言えます。線形理論と言う用語は、本来、数学的な意味を言いますので、力学的な意味の弾性理論と同義ではありません。曲げモーメントを増加させていくと、図 9.6 の圧縮側のように応力分布が変り、鉄筋も降伏点以上には応力が伸びません。鉄筋コンクリート梁の最大抵抗モーメントは、このモデルを採用します。これについての詳しい計算法の説明は、下記の URL を参照して下さい。

「易しくないコンクリート工学；第 5 章矩形断面部材の計算法」

<https://www.e-bridge.jp/eb/tcontents/yasasikunai-concrete/top.html>

9.3.7 断面係数と塑性係数

構造物の設計の基本的な考え方は、実物を使って実荷重を載せる実験をして安全性を確認することです。しかし、費用と手間を考えると実用試験には向きません。実物の部材を使うことが次善の方法です。これも贅沢な試験方法ですが、説得力があります。豊富な資金に恵まれる米国で多く実施されます。この実物試験の結果から、設計で使い易いモデルを考え、それを元にして実用的な計算法を提案します。この場合の提案式は、指数関数・対数関数・三角関数などの高級な数学関数をなるべくなら使わず、また三次式以上もできれば避ける態度を取ります。この見方で、単鉄筋・腹鉄筋などの鉄筋コンクリート梁の実用設計計算式や、塑性計算の式が提案されていることを理解する必要があります。学者が提案する設計式は、高級すぎて数値計算技術からは迷惑であることが少なくありません。構造物の設計では、実用荷重で使用する場合には、最大応力度が弾性範囲内に収まるようにします。つまり弾性設計法が基本です。しかし、例外的に大きな荷重が作用して崩壊する危険を避けるため、最大、どの程度まで持つかの見積もりを踏まえ、このときに塑性設計法を応用します。鋼材の力学モデルを図 9.3 のように降伏点を超えてから平らに移行すると仮定しても、曲げ材にすると、耐荷モーメントが降伏点を超えても増加して行くこと（図 9.8）に注目して下さい。梁の設計計算に応用するとき、図 9.8 の b 点と d 点の二か所で抵抗モーメントの計算を求めておいて参考にします。第 4 章、4.2.7 項では断面係数 W の紹介をしました。これは、曲げモーメントによる梁の応力度分布が直線であるときの、縁応力度と抵抗モーメントの関係を表します。これとの類似で、塑性係数 Z は、応力度分布が矩形（図 9.10）であるときの定義です。

$$\left. \begin{array}{l} \text{弾性理論} \quad \sigma = \frac{M}{W}, \quad W : \text{断面係数} \\ \text{塑性理論} \quad \sigma = \frac{M}{Z}, \quad Z : \text{塑性係数} \end{array} \right\} \dots(9.3)$$

$$\text{形状係数} \quad f = \frac{Z}{W} \quad \dots(9.4)$$

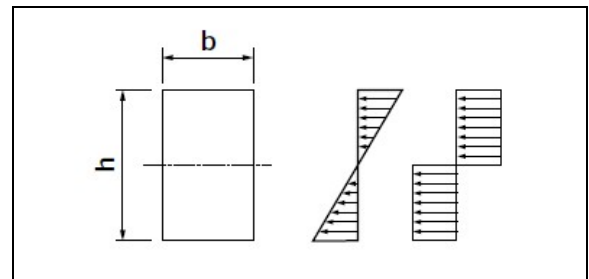


図 9.10 曲げ応力度の分布（弾性と塑性）

9.3.8 断面係数と塑性係数の計算例

(i) 矩形断面の計算式

図 9.10 に示した矩形断面の断面係数 W と塑性係数 Z とは、公式集を参照しなくても、簡単な釣り合い条件で計算式を導くことができます。

$$W = \frac{bh^2}{6}, \quad Z = \frac{bh^2}{4}, \quad f = 1.5 \quad \dots(9.5)$$

(ii) H形断面での計算例

断面	断面積	y		断面係数	塑性係数
	A (cm ²)	y (cm)	A×y (cm ³)	ΔW (cm ³)	ΔZ (cm ³)
400×21	81	20	1620	1620	1620
13×400	26	10	260	347	520
400×21	81	-20	1620	1620	1620
Σ =	188			3587	3760
				形状係数 =	1.05

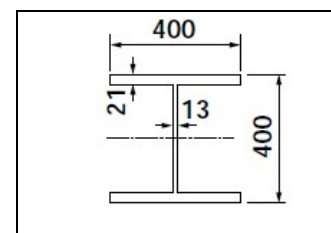


図 9.11

備考：ウェブの部分の係数は、式 9.5 を利用している。

10. 衝撃・振動・疲労

10.1 応力の動的な増加

10.1.1 振動すると静的な力よりも大きな力になる

梁を考えて、最も単純化した動的な荷重の載せ方は、例えば、錘の重量が伝わらず、梁に接するように支えておいて、これを離すときです(図10.1)。弾性的な梁であれば、静的に荷重を載せたときの撓みの2倍まで変形し、振動を始めます。最大応力度の方も2倍になります。自重による応力度を考えなければ、許容応力度を降伏点の1/2以下にしなければなりません。すこし離して、或る高さから錘を落下させると、最大応力度は2倍を超えます。これが衝撃分です。

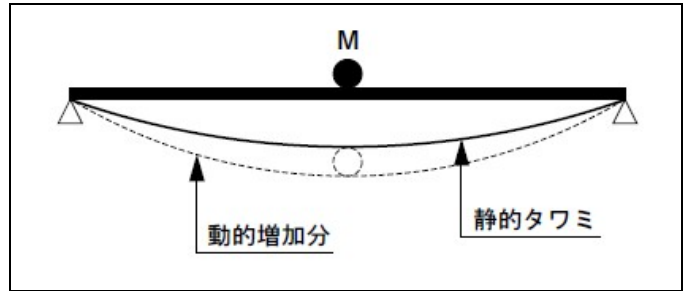


図 10.1 動的に荷重を載せる

橋梁の設計では、自動車などの活荷重による動的な応力増加は、落下距離の短い衝突現象で起こります。その増加分を見積るとき、衝撃係数分の追加重量が作用するとして計算します。衝撃係数の大きさは、主に実際の橋梁での実測を参考にした、経験式を使います。橋梁設計は、構造系によって撓みを支間長の1/600~1/1000以下にするように制限しています。撓みが小さいと、衝撃による応力の増加分が相対的に大きくなりますので、衝撃率は、支間が大きいと小さくなるように決めています。梁が自重だけを支えている場合も、梁が振動すれば追加分の応力が発生します。このことを考えると、死荷重応力度についても拡大率を考えるべきです。しかし、明示的なものは地震時の設計震度です。実際の構造物での振動の表れ方は良く分かりませんので、死荷重・活荷重を含めた全体を考えて、許容安全率を決めなければならない不確定さが伴います。この中に、後で説明する疲労も考えるようになりました。

10.1.2 衝突の力学は運動量の保存則を使う

一般力学授業の期末試験の古典的な問題に、衝突があります。これを解く条件は、運動量の保存則を使うのが正しく、運動エネルギーの保存則を使うのは間違いです。運動エネルギー保存則も同時に成立するのは、質点の材料が理想的な弾性体の場合です。普通の場合は、衝突させると、運動のエネルギーの一部が塑性変形、または熱、に使われます。材料力学の課題と取り上げるときは、力の作用と変形とを時間的に追いかける解析をします。このとき、「力が材料の中を伝わる速さ」(5.1.1項も参照)が無視できるときは、衝突が起きて運動が止まるまでの運動方程式を解けば、力の大きさが得られます。この力による応力度が、材料の弾性範囲内であれば、反撥(リバウンド)や振動を起こします。降伏点よりも高ければ、この降伏点で決まる一定の反力がブレーキ作用をして、或る距離の塑性変形量が出ます。このとき、どれだけの塑性エネルギー分が吸収できるかで、衝突後の運動が決まります。材料の破壊に使われるエネルギーの全量を使い切れれば、破断が起こります。塑性変形の途中で止まると、弾性エネルギー分が未だ残っていれば、衝突後であってもリバウンドや振動を起こします。

10.1.3 衝撃試験も参考にする

破壊には外部仕事が必要です。それを試験する装置の一つとしてシャルピー (George Charpy, 1865-1945) が考案したシャルピー衝撃試験機があります(図10.2)。原理は、振り子状にした錘のハンマー作用で試験片を折損させます。起点高さから振り子の錘が振り抜いて、試験片を破断させた後、錘が或る高さになった高さの差が位置エネルギーとして消費されたことになります。試験片断面積当たりの破壊エネルギーとして整理し、強度の指標に使います。この試験は、低温脆性の研究から注目されるようになりました。疲労強度も低温になると下がるのが類推されています。力が作用する機械装置は、経験的知識として、ウォーミングアップして使うと長持ちします。

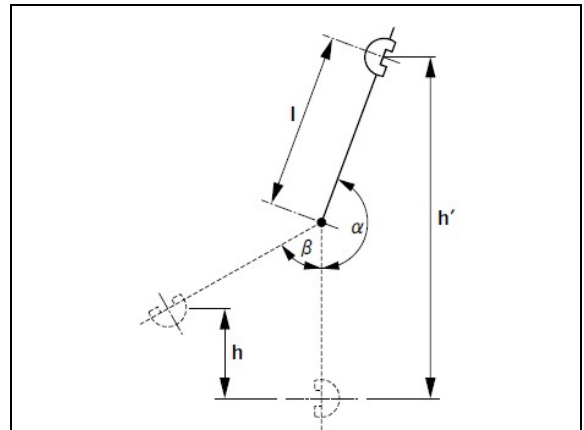


図 10.2 シャルピー衝撃試験機の原理

10.2 振動と波動

10.2.1 一か所で観察するとき振動として扱う

橋梁のように、全体をマクロに見て梁として扱うことができる構造は、或る一か所での振動は6成分を考える必要があります。通常は鉛直方向の撓み振動に注目します。全体系で見ると、横方向の曲げと捻じれの性質を含めた、3成分の振動を知ることが基本です。しかし、他の成分に関しては、特に注目しません。一方、船舶、航空機などの乗り物では、回転成分の方を主に注目し、ピッチ (pitch)、ロール (roll)、ヨー (yaw)として取り上げます。力学的に振動を解析するモデルは、全体を質点 (マス; mass) の集合とします。質点間の相互移動が拘束された一体物として扱えるときは、剛体の力学に分類します。質点間の相対的な移動に弾性的な拘束が有る場合の実践的な扱いは、有限個数の**集中質点** (lumped mass) の集合でモデル化します。質点一個について3方向に運動の自由度がありますので、質点数がN個であれば3N個の振動モードの解析が必要です。通常の解析、例えば橋桁の振動では、橋桁の上下動と捻じれに注目し、必要があれば横方向の振動も扱います。この制限をすると、振動モード解析の手間が減ります。実際構造物の振動測定は、その構造物の力学モデルを仮定して、固有振動モードの解析と、そのモードごとの固有振動数の解析をして、実測値と比較します。実測値をよく説明できれば、対象とした構造物の力学モデルが同定されたと判断できます。この振動測定の測定箇所を選択するとき、振動モードの節に当たる箇所であれば、その振動モードの性質が得られませんし、また、部分的に独立に振動する二次部材の測定位置を選ぶと、説明に困るデータが得られる、などの問題があります。その意味で、構造モデルを理解した上で、振動測定技術そのものについても研究が必要です。

10.2.2 波動の性質を見落とすことがある

振動の性質を、質点単独ではなく、全体を見通せば、隣接する質点間で力の受け渡しと相対的な変位が観察されます。これは時間差を伴って伝わります。つまり波動です。波動には縦波と横波の区別があって、速度があります。質点の並び方向に振動が伝わるとして、質点の振動方向が並び方向であるのが縦波、直角方向が横波です。縦波の方は、材料内部を音として伝わる性質ですが、横波は少し複雑です。地震動の場合、縦波はP波と言ひ、横波については境界条件によって表れ方に幾つかの呼び名があります (S波、ラブ波、レイリー波)。梁の曲げ振動は横波です。波動としての性質は、どの向きの曲げを考えるかの区別と、梁の境界条件によっても変わります。橋梁の上下方向振動の場合には、波動の速度として約200m/secが実測値を良く説明できることが分かってきました。例えば、1000m級の長大吊橋の場合には、支間一往復に約10秒かかります。この周期に相当する固有振動モードは、吊橋全体として一波形の振動モードに当たるのですが、このモードの変形が観察されることはありません。振動測定をして、振動データをフーリエ解析すると、周期10秒の固有値も計算されます。実は、パルス状の波形が支間を往復すると、固有振動のフーリエ級数解が連続的に得られます。そのすべてが実の振動波形と対応するわけではありません。これを用語としては、**固有振動数**と**卓越振動数**と言ひ分けします。固有振動数は、数学的に無限に多く存在します。卓越振動数が、実際現象として意味を持つデータであって、幾つもある固有振動数のごく一部です。この同定には、相関解析を併用して判断することが適しています。

10.2.3 細長い部材の縦波は波動の速度が定量的に計算できる

弾性体を伝わる横波は、境界条件などで一意には決まりませんが、縦波 (音) の伝播速度は次の式で求められます。Eをヤング率 (重力加速度9.8を掛けたニュートン単位/断面積)、 ρ を密度として、

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (10.1)$$

鋼材では、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ を代入すると、 $v = 5120 \text{ m/sec}$ です。コンクリートでは、ヤング率を鋼の1/7、密度を 2400 kg/m^3 として、 $v = 3500 \text{ m/sec}$ となります。この速度はかなり速いので、動的な力伝達作用を考える必要がありません。しかし、例えば、鋼柱を杭打ちハンマーで叩くと、或る応力度振幅の縦波が柱を伝わります。この応力度振幅は、材料の降伏点以下の弾性範囲内でないとは伝わらないはずですが、そうであると、ハンマーが直接当たる個所で、衝突によって生じる柱側の初速度が、上記の波動速度を超えるような場合、その差に相当する運動エネルギーは、衝突個所の塑性変形に使われます。柱を伝わる弾性波は、柱の反対側に達すると、そこでの境界条件によって、反対側に伝わるか、部分的にリバウンドとして叩いた側に戻り、何回かの往復をすることがあります。長い柱の両端が剛に拘束されていると、座屈変形を起こすことがあります。釘打ちのとき、強く叩き過ぎると曲がるのがそうです。

演習例題 10.1

(1) 図 10.3 において、AB は、長さ L の弾性的な鋼棒である。A 点で固定され、B にフランジがついている。錘 W は、棒をガイドとして、高さ h から落下させる。錘は、衝撃的に B を介して棒に力が作用し、或る最大撓み δ を生じる。この撓みを求めよ。ここに、鋼棒の断面積 $A=20\text{cm}^2$ 、ヤング率 $E=2.1\times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $W=2\text{t}$ 、 $L=5\text{m}$ 、 $h=5\text{cm}$ 、とする。

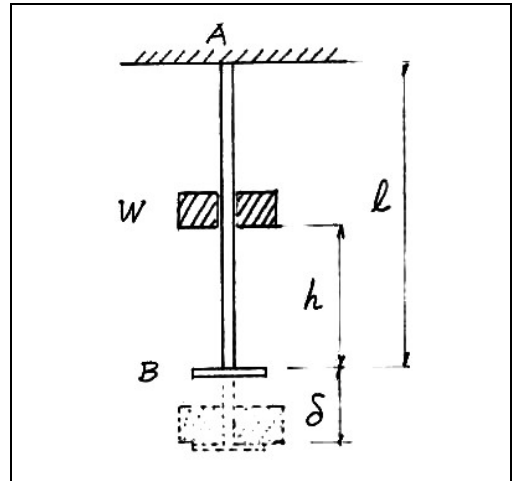


図 10.3 重錘の落下による撓み

(2) 錘の衝突後はリバウンドで錘は跳ね上がり、或る高さ h' に戻るとする。現象としては、この高さからの落下が起きて、何度かの衝突が繰り返される。リバウンドによる位置エネルギーが消費される分は、鋼棒の運動エネルギーになり、これは鋼棒の縦振動になる。この振動数と加速度（応力波）を求めよ。

解説：

この問題は、段階的な思考実験に適しています。まず、第一段階として、静的に錘 W を吊り下げたときの鋼棒の解から始めます。断面の応力度を σ 、そのときの撓みを y とします。

$$\sigma = \frac{W}{A} = \frac{2000}{20} = 100 \text{ kgf/cm}^2 \quad y = \frac{W}{EA} L = \frac{2000}{2.1 \times 10^6 \cdot 20} \cdot 500 = 0.0238 \text{ cm}$$

錘 W が最初の衝突で静止したとき、「錘の位置エネルギー分 $W(h + \delta)$ が棒の弾性エネルギー U と等しい」とする条件を考えると、下の式が得られます。

$$U = \frac{EAL}{2} \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 = W(h + \delta)$$

この式は、 δ の二次式です。解は下の式です。ここに y は、上の静的な撓みです。

$$\delta = y \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y}} \right)$$

上の式は、次のように解釈します。 $h=0$ であるときは、錘をフランジに接した状態で離すことですので、 δ は、静的撓みの 2 倍です。静的に荷重を作用させた状態で、付加的な変位を与えるときは、 h を負の数とします。 $h=5\text{cm}$ であると、静的な撓みの 21.52 倍の撓みですので、 $\sigma=2152 \text{ kgf/cm}^2$ です。この問題を、錘 W の衝突とすると、フランジに接触するときの速度は、 $h=5\text{cm}$ を落下するとして

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 980 \times 5} = 99 \text{ cm/sec}$$

錘の落下衝突によって、錘はリバウンドで h' に撥ね上がるとします。ポテンシャルエネルギーの差、 $\Delta U = W(h - h')$ が鋼棒システムに伝わります。このシステム全体が完全な弾性体であるとして、このエネルギーが鋼棒の弾性エネルギーに使われたとします。鋼棒は、静力学的には応力度がありませんが、縦振動で伸縮すれば応力度が発生しますので、その弾性エネルギーを求めることができます。そのときの最大応力度を σ' と置くと、

$$\Delta U = \frac{AL}{2E} \sigma'^2$$

リバウンド量を $h' = 0.5h$ と仮定すると、応力度は次式で得られます。

$$\sigma' = \sqrt{\frac{2E}{AL} \cdot W(h - h')} = \sqrt{\frac{2 \times 2.1 \times 10^6}{20 \times 500} \times 2000 \times (5 - 2.5)} = 1449 \text{ kgf/cm}^2$$

鋼棒は、その長さを伝わる縦波（音としての振動）があります（10.2.3 節参照）。その速度は 5120m/sec です。この速度で弾性波が鋼棒を 1 往復する周期で鋼棒が振動すると、周波数は 512Hz です。この動的な応力度 σ' は、鋼棒の上端 A で逃げてしまいますので、振動が減衰します。

10.3 疲労破壊の全体概念

10.3.1 疲労破壊の予兆は亀裂から

材料が利用できなくなる原因としては、化学的な腐食などの原因による劣化もあります。材料力学の課題は、力の伝達機能が損なわれる破壊か、または、変形が大きくなることを扱います。変形が大きくなる現象は外見から発見できますので、全体の破壊が起きる前に対策を立てることができます。予測が難しい、突然起こるような破壊は、脆性材料に見られます。弾性材料の疲労による破壊は、脆性破壊と似た現象で起きます。疲労破壊の予兆は、局所的な小さな亀裂の発生で発見されます。これは材料が部分的に変質して脆性化した個所が起点になります。この状態では、未だ全体として大きな変形を起していません。亀裂が進行して全体が破壊するまでに幾らかの時間的な余裕があると、その間に安全の対策を取ることができます。腐食し易い環境では亀裂の進行が早まることも知られています。しかし、亀裂の発生が見えない個所があると、全体破壊が突然起こる怖さがあります。構造用鋼材自体は引張破断するまでに大きな塑性変形を示す材料ですが、溶接部や応力集中が有る個所が局所的に脆性的な性質になり易いことから、そこから亀裂を起します。他の個所が未だ塑性的であると、亀裂の進行が局所的に留まるか、ゆっくりと進行します。鋼の鉄道橋では、列車もろとも、落橋する事故は殆ど起きていません。菊池洋一（談）によると、鋼桁の実験室での疲労実験から類推して、眼に見える亀裂の発生から全体破断までに、実際の列車運行では少なくとも一カ月以上の余裕になるそうです。その間に、橋梁を通行する列車の乗務員などから、何かの異常音がする、などと保線掛に連絡が入りますので、そこで亀裂が発見されて対策が取れるから、と想像できるからです。

10.3.2 破壊させるにはエネルギーが必要

理想的な弾性体は、力が作用すると、それをポテンシャルエネルギーとして内部に保存する性質があります。これは再生可能なエネルギーです。現在では殆ど使いませんが、ゼンマイ式の時計を考えると分かると思います。ゼンマイは、一週間巻き、二週間巻きのように、長い日数に使えるものが高級品です。この違いはゼンマイバネの長さを長く使うことで実現させています。このことは、連続体としての弾性体をエネルギーの入れ物に使っています。保存可能なエネルギーの量は、体積に比例します。材料を贅沢に使うと、丈夫で長持ちし、安物はそれをケチるのですぐ壊れるという一般的な常識があります。外から加えるエネルギー（仕事）が弾性体内部に保存できる受容限度を超えると、超過分のエネルギーは、塑性変形に使われます。これにも相応のエネルギー受容限度があって、それを使い切ると破壊します。脆性材料は、塑性変形分に使うエネルギー受容限度が小さい材料です。疲労は、繰り返して応力が作用する環境にある材料が、塑性変形のエネルギー受容能力を食い潰す現象と捉えます。外見では分かりませんが、材料の性質が脆性化していきます。砂利や砂などは、弾性も殆どありませんし、塑性もありません。外から加えた仕事は、粒を小さくする破壊に使われるか、内部摩擦の作用で熱に変わります。

10.3.3 エントロピーと言う概念がある

一般的に見れば、エネルギー（例えば電力）の、保存と取り出しを効率的に制御する方法について、多くの研究開発が行われています。材料の弾性エネルギーは、保存と取り出しを目的としません。熱力学は、エントロピーを、保存できなくて「消費するエネルギー分を絶対温度で割った単位」で定義します。エントロピー増大の法則（熱力学第二法則）があって、再利用のできない熱やごみに一方向に進行する法則です。材料の破壊は、連続体を二つ以上に分けますが、これをエントロピーの増大とみます。材料の劣化や破壊は、エントロピーの増加現象と捉えます。温度が低い状態で使うと早く傷みます。低温脆性は、この見方ができます。このエントロピーの概念は、情報工学の方にも応用されるようになって、複雑さを表す概念に使うようになりました。情報量は減ることはなく、乱雑さも増えるばかりです。粉砕は、エネルギーを使って粒に分解します。砂利よりも砂の方がエントロピーは大きいことになります。砂利や砂の粒度分布は、粒径分布の乱雑さを統計的に扱いますので、エントロピーを定量化する一種の表し方です。岩石などを粉砕すると、全体の表面積が増えます。セメントの粉末度は単位重量当たりの表面積で計量しますので、表面積がエントロピーを代表させる量になっています。何かの材料をエネルギーに変換して利用できる時、エネルギー資源（resource）と言います。利用するために費用が掛かり過ぎるのであれば、経済的には資源とは言いません。破壊は資源を消費します。現代は、ゴミを出さないか、ゴミも資源として再利用することを考える時代になりました。

10.4 疲労試験の難しさ

10.4.1 疲労の現れ方

単純に疲労と言うときは、人間を含め、動物が運動を持続する機能が低くなることを言います。和語で言う「疲れる・くたびれる」です。病気ではありませんので、疲労の回復があって、再び運動を始めることができます。材料の疲労(fatigue)も、この類推で言います。繰り返して力を受ける使い方は、機械部品の運動と見なすのですが、くたびれ方は外見では分かりません。或る回数の繰り返しで力を増減させると、亀裂や破断などの欠陥が現れることを疲労破壊と言います。材料の疲労は、動物のような自己回復機能がありませんので、新しい材料と取り替えます。構造物では亀裂の進行を抑える延命の工夫も試みられています。疲労による破壊は、変形が大きくなるような兆候が現れる間もなく、突然起こる脆性破壊の様相を示します。このことが材料の使い方を神経質に計画しなければならない理由です。航空機などの機械部品は、或る一定の使用期間が済めば、外見的に未だ健全であっても、新しい部品と取り替える規則を決めます。一定の期間をどのように決めるかは、疲労試験のデータを参考にします。そこで、どのように疲労試験をし、それをどう評価し、どう実用に載せるか、の技術が問題になります。

10.4.2 繰り返し回数の見積り

経験的に言えることは、繰り返して作用させる力の大きさが小さければ、疲労が進まないことです。回転する機械部品、例えば自動車のエンジンは、一分間に何万回転もしますので、繰り返し回数は非常に大きな数になります。使用状態と同じ条件で再現実験をするとすると、破壊するまでの試験期間を予測することができません。したがって、少ない回数で疲労破壊が発現するような加速試験を工夫します。普通は、実用される状態よりも大きめの応力度振幅で実験します。繰り返し回数が一回であるのが静的な材料試験と見なします。この疲労強度を降伏点とします。鋼材は、比例限界までは理想的な弾性的な性質があると見なします。数回から百回程度の繰り返し回数での破壊を低サイクル疲労として研究することがあります。例えば、大地震などで構造物が大きな振動変形を受けても、悲劇的な崩壊をしない限度を知る目的に使います。鉄道橋の主構造の疲労設計をするときの回数は、列車の運行回数を参考にした200万回を一つの限界に設定していました。機関車の重量が大きいので、主構造の疲労を支配する回数を列車単位の運行回数にしました。一日30往復とすると1年で約1万回、耐用年数を100年とすると、100万回です。一方、道路橋では混合交通であって、最大重量車が定期運行する状態を考慮することができません。道路橋の設計では、従来、疲労を考えなかったのですが、自動車交通量が増え、重量車の割合が多くなったこともあって、特に床組みで疲労による劣化が顕在化しました。設計荷重を低めに抑えた二等橋は、交通量が少ない個所に架設されるのですが、一等橋並みの交通量にさらされると、疲労の進行が早いことも経験されるようになりました。しかし、現実の荷重の実態は良く分かりませんが、200万回の限界設定とは考え方を別にしなければなりません。

10.4.3 荷重を制御する試験機の設計が難しい

疲労試験の計画は、三つの問題を解決する必要があります。**第一**が試験機の開発です。普通に使う材料試験機は、試験体に強制的な変形を加えて、そのときの抵抗力を計測します。破壊したときには力が下がります。疲労試験の場合は、荷重の方を一定振幅で何回も繰り返すような装置を工夫して、破壊が生じたときの回数を数えます。健全な状態の材料であれば、変形が小さいのですが、破壊して大きな変形が起きても、力が作用したままの状態が続くと、試験装置の方にも障害が及ぶ危険があります。実際に材料が使われている個所は、部品単独の破壊で済むのではなく、行き場がなくなった力が、連鎖的に他の個所まで巻き添えにする破壊があるので深刻な問題になります。**第二**は、荷重の加え方です。普通の静的な材料試験機は、引張試験状態のまま逆向きの圧縮試験ができません。**ヴェーラー**(A. Woeler, 1819-1914)は、当時の鉄道車両で頻発した車軸の疲労破断を研究するために、回転曲げ疲労試験機を開発しました。これは両振れ応力度を受ける試験装置として、現在でも普通に使われている疲労試験機の原理です。ただし、試験体を丸棒に製作する制限があります。また、断面図形の計算上の縁応力度を使いますので、理想的な引張・圧縮応力度試験と同じデータになるとは言えないところがあります。**第三**は、繰り返し回数の制御です。100回程度までの繰り返し載荷試験であれば、何とか手動で制御できますが、何万回ともなれば、自動化が必要です。仮に一秒一回の繰り返しならば(60 rpm)、100万回は連続運転で12日間掛かります。一般論として、疲労試験は、実物を使う試験が理想です。これは実際には難しいので、実際現象ごとにモデル化して実験する装置と設備に工夫を必要とすることと、試験の実施に時間と費用がかかります。

10.5 疲労実験データの整理

10.5.1 荷重の大きさと振幅

実験室レベルで行う材料の疲労試験は、或る一定の応力度振幅になるように制御できる疲労試験機を使って繰り返しの載荷をして、破壊するまでの回数を横軸にした座標にプロットします。設定した応力度を、その回数での**疲労強度**とします。応力度の大きさを変えた複数の実験データをグラフにしたものを**S N線図** (stress number diagram) または**ヴェーラー図**と言います (図 10.4)。最大・最小応力度の比を一定にしておいて、大きい方の応力度がパラメータです。ヴェーラーが発見したことは、鋼材ならば、100 万回程度までの繰り返し回数が一つの限界を与え、それより回数を増やしても破壊しません。この限界を**疲労限**と言います。ただし、現在は、もっと大きな繰り返し回数まで実験する必要があります。疲労限は、設定する最大応力度と応力度振幅によって変わります。回転曲げ疲労試験は、曲げモーメントによる縁応力度が正負交番しますので**両振れ強度**を与えます。0 と或る応力度の間での疲労強度を**片振れ強度**としますが、両振れ強度よりも大きく出ます。これら二種類の強度は、同じ実験状態と同じ応力度分布に制御した状態では得られませんので、直接比較に使うことは問題ですが、定性的には納得できるデータとして利用しています。

10.5.2 実験データの整理方法

疲労実験のデータは三段階にわけて整理します。疲労実験は時間と費用が掛かりますので、統計処理に載せるような大量のデータを蓄積することが難しい面があります。**第一段階**は、実験計画です。或るパターン、通常は両振れ、片振れの疲労応力度範囲 (S) を設定し、破壊するまでの繰り返し回数 (N) を両対数グラフにプロットします (図 10.4)。これを直線関係で近似させます。実験を効率的に計画するため、100 万回以内で疲労破壊するように応力度を設定します。この直線を延長して、例えば 200 万回の応力振幅の値を読み取り、これを疲労限とします。一つの疲労限の数値が得られるまでに、かなりの日数が掛かります。

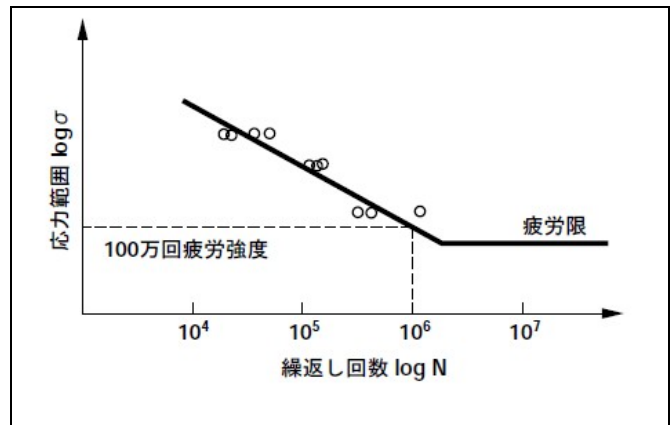


図 10.4 S N線図

10.5.3 応力度振幅の関係を求める

第二段階は、両振れ、片振れなど、応力度振幅の種類を変えた実験の疲労限のデータを、図 10.5 のようにプロットします。この図の見方を説明します。疲労実験の応力度範囲は、 σ_{max} 、 σ_{min} に設定されて疲労限が図 10.4 で得られたとします。図 10.5 は、 σ_{min} を横軸にとって σ_{max} をプロットした形で曲線を模式的に描いたものです。45度の参考直線との縦距の差が応力度振幅です。実を言うと、疲労限の実験データは、両振れ、片振れ、そして応力度振幅が 0 で破壊する降伏点の 3 か所が主要なものです。この応力度のこのグラフは鋼材の疲労をモデル化しましたが、圧縮応力度の場合を含める必要があるときは、このグラフを上下逆にした図が追加される表現になります。しかし、溶接などによって内部応力度があると、応力度振幅の実際がよく分からないこともあります。

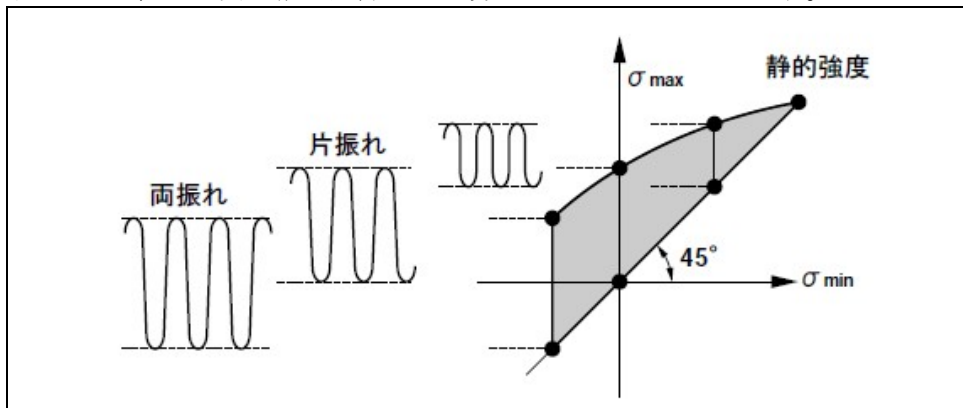


図 10.5 応力度振幅による疲労限界の現れ方

10.5.4 応力度振幅の関係を求める

疲労を考えて部材の断面設計をするときは、部材に作用する応力の方の振れ幅を予測しておいて、材料の許容応力度を決めます。例えば、トラス橋の設計では、弦材ごとに影響線を求めておいて、最大・最小の軸力 (S_{min} , S_{max}) を計算します。ここで、(S_{min}/S_{max}) を、図 10.5 の ($\sigma_{min}/\sigma_{max}$) と同じ値になるように許容応力度 σ_{max} を決めたいとします。これが**第三段階**の整理です。図 10.6b は、この提案を使い易いグラフにまとめたものです。このグラフを作成するときは、図 10.5 のグラフを、数式に載せやすいように抽象化した図 10.6a に書き直します。応力度の振幅を表すパラメータを、 $k = (\sigma_{min}/\sigma_{max})$ で置き換えます。 $k = -1$ は両振れ、 $k = 0$ は片振れ、 $k = 1$ は静的強度 (降伏点) です。応力度の振幅が小さい範囲は疲労限を降伏点に置くことにして、疲労限 σ_{max} を σ_{min} の一次式で表します。そうすると、疲労限 σ_{max} は、下の式で表すことができます。

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}} \\ \sigma_{MAX} &= a + b\sigma_{MIN} \end{aligned} \right\} \text{とおくと}$$

$$\sigma_{MAX} = \frac{a}{1 - bk} \quad \dots(10.2)$$

図 10.6b のグラフを、ほぼ相似にして、鉄道橋では許容応力度の提案式に使っています。材料の降伏点に対して採用した安全率を、疲労を考える場合の安全率にも準用します。 k の値は、部材の応力振幅の計算値 (S_{min}/S_{max}) を代入します。

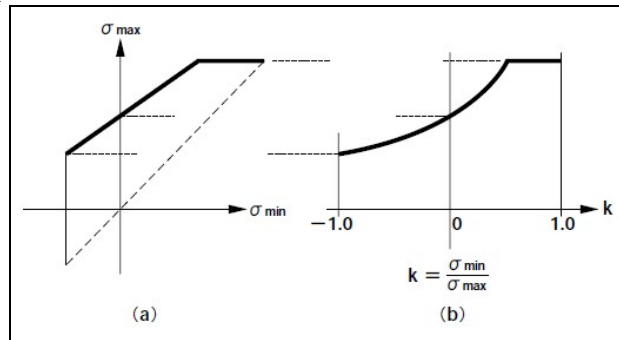


図 10.6

10.5.5 ランダムな外力の評価方法

疲労は、材料内部の塑性変形のエネルギー受容能力を食い潰す現象と捉えます(10.3.2節)。そうすると、50万回の疲労強度と言うのは、一回の繰り返しで50万分の1のエネルギーを消費する計算になります。種々の大きさの荷重がランダムに作用するときは、個別の消費量を全体で積算して、その大きさが或る一定値に達したところで疲労破壊が起こると仮定します。機械装置は、荷重がランダムに変動することを考える必要が多くありません。鉄道橋は、或る程度、通行する最大荷重の大きさと回数とを求めることができます。鉄道は、重量の大きい蒸気機関車や電気機関車の利用に代えて、電車化が進みました。これは車両を軽量化しますので、既存の構造物の耐久性が向上したことが、保線の現場では実感されています。新幹線の車両も初期の重量から25%も軽量化が進みました。一方、道路橋では、逆に、車両重量も通行量も増加しています。交通量の調査や予測は行われています。しかし、疲労の影響を考えると、通行車両の重量の実態も調査しなければなりません。この調査研究は未だ多くありません。橋梁の設計示方書で規定されている許容応力度は、実質的には、疲労限を超えない範囲に設定します。これは、経験に基づいて、降伏点の約1/2です。1993年までは、一等橋・二等橋の区別があって、二等橋の荷重は、計算上 一等橋の70%としていました。時代の推移によって、実質の自動車荷重が増加するにつれて、同じ交通量の環境では二等橋の方に疲労が多く発現する傾向が見られるようになりました。これは、実際の応力度が疲労限を超える確率が増えたから、と解釈することができます。その原因となるランダムな繰り返し荷重の実態を測定することは難しいのですが、実測データが得られた場合、その大きさと出現回数の統計量を、解析に向くよう整理しなければなりません。これは案外面倒なものです。**遠藤達雄**・松石正典は、不規則に大きさが変動する荷重を評価する方法として、**レインフロー法** (雨だれ法; Rain Flow Method) のアルゴリズムを1968年に発表しています。この手法が近年になって改めて評価されるようになりました。(ここでは、解説は省きます)。

10.6 破壊に影響する寸法効果

10.6.1 内部欠陥説

材料の強さは、材料表面、また、眼には見えない内部の欠陥があると下がるだろうと言う仮説は、経験的な事実から支持されています。試験体を滑らかに仕上げると、そうでない場合よりも強度上がることが知られています。意図的に切り欠けを作ると、特に疲労強度が下がります。材料内部の欠陥がどのようなものであるかは良く分かりませんが、一つのモデルは、小さな穴と仮定することです。鋼材の引張り試験をして材料が塑性変形をすると、材料が結晶レベルで繊維状に並び替わが起こり、この穴の形が縦長に引き伸ばされ、相対的に幅の狭い楕円に縮まり、結果として強度が上がるのだ、とすると理屈に合います。圧縮試験では、穴による有効断面の減少効果は考えられません。脆性材料では、相似な試験体を使う強度試験に寸法効果が知られていて、寸法が小さい試験体を使う方が、相対的に強さが上がります。この説明には、寸法が大きい試験体の方が欠陥の数が多くなるためと考えると理屈に合いません。これを統計的に説明したのが、ワイブル分布の名前で知られている W. Weibull (1887-1979) です。

10.6.2 形状による影響もある

力を伝える目的の部材は、それを繋ぐ個所で強度が下がるのを補う構造を工夫するか、強度が下がることを計算に入れて部材の寸法を決めます。金属材料の引張強度試験をするとき、試験片の両端で保持する個所の断面積を大きくして (図 3.13 参照)、局部的な応力度の影響が破断部に影響しないようにします。小寸法の丸棒では、このような加工ができませんので、十分な長さの摩擦長になるように支持します。脆性材料では、このような摩擦力で支持する方法を使うと、支持個所またはその近くで破壊します。したがって、圧縮試験を主に利用することになります。このときは、試験体に力を作用させる端面で横方向に拘束力が作用して、三軸圧縮状態が生じて、一様な圧縮状態の試験にならないことが起こります。試験体の高さが横幅の2倍以上であれば、高さの中央部では、ほぼ一様な圧縮応力度状態になります。しかし、高さが低いと、強度が高めに出ます。日本とアメリカではコンクリート材料は円柱の試験体を使い、その高ささと直径の比は2です。ヨーロッパや中国では立方体を使っています。同じ材料で圧縮試験をすると、立方体の方が高めの強度を示します。

10.6.3 穴を開けた部材

鋼板に穴を開けてリベットで綴じする方法は、鋼構造物では普通に用いられていました。現在はリベットに代えてボルトが使われています。鋼板の方に注目すれば、この穴は断面積を減少させる一種の欠陥です、穴の位置を伝って破壊しないように、そして、静的な強度が落ちないようにするため、穴の配置に工夫が必要です。横一列に穴を開ける場合、原則として、少なくとも純断面積の75%を有効に使えるようにします。今、千鳥に穴を配置して一列に並ぶ穴による断面控除を避ける工夫もしますが、斜めの位置にある穴を伝って破断することが無いようにするため、斜め位置の穴を繰り返すときの控除の方法も提案されています。穴の周辺は、応力集中の個所ですので、静的な引張力の作用する環境では、亀裂は穴の周辺から発生するとの予想があります。しかし、実際には塑性変形によって、最小断面が全体として一様に引き伸ばされて破断します。ところが、疲労によると考えられる破壊は、穴周辺の応力集中個所からの亀裂が観察されるだけでなく、板の端から亀裂が進行することがあります。このときは、穴の位置に関係なく、力の作用方向と直角に亀裂が進行することも観察されています。

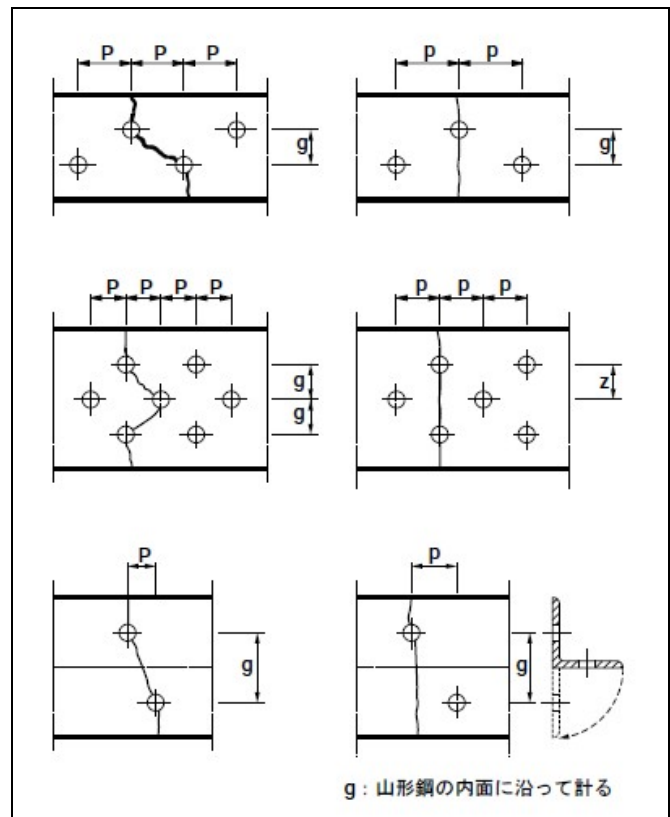


図 10.7 リベットの穴あけ部材の静的破壊

11. 数理弾性学

11.1 弾性体の数学モデル

11.1.1 理論と実用との使い分けが問題になる

我々の身近に見られる構造物、例えば、木造の住宅建築は、梁と柱のような部材を組み合わせて重さを支えています。外から見ている限りでは、部材に作用している力の大きさと分布は全く分かりません。変形する、さらには破壊するのは、力の作用によって眼に見えるようになった現象です。これから逆に、部材内部に作用している力の大きさを推定することを研究し、その知見を合理的な部材の使い方の提案に応用します。この研究の道具として、現代では実験と数学的解析を応用しています。しかし、単純な構造物は昔から建設されていますし、理論的な知識なしでも、経験的に部材の安全な使い方がされてきました。材料の積算など、材料の寸法と重量の計算は必要です。それも単純な算術を使う程度で済ませることが出来ます。形状を扱うとなると幾何の知識が必要です。これにも計算技術を使います。しかし、やや特殊な三角関数の概念は古くからあったにしても、理解はかなり難しいものです。より寸法の大きな構造物を建設したいときは、今までの寸法から段階的に大きな寸法の材料を使う経験を踏まえ、数値を直接扱わないで、記号を使った算法、つまり代数学を応用すれば、実物を作る前はかなり合理的な推定ができますので、従来の経験がなくても、新しい構造物の設計提案ができます。18世紀以降、重量の大きな列車を渡す目的に、現代からみても巨大な構造物が建設されてきました。その設計理論を支えたのが**応用力学**(applied mechanics)です。一般に言う**力学**(mechanics)は、**物理学**(physics)の一分野です。その範囲は、主に、力と運動の関係を扱います。構造物と直接向き合う力と変形を扱う材料力学は、実学に分類します。構造物の設計技術にまで落とすときには、理論を使い易い提案式にまで噛み砕かないと実用になりません。実務から見れば遠回りにみえますが、理論的な扱いについて、一通りの常識を埋めておくことが大切です。

11.1.2 力の実体は分からないこと

力学は、力を扱う学問ですので、そう呼ぶのですが、力の理解は難しいところがあります。一般力学では、力を $F = m \alpha$ と定義します。重さは、我々が感覚的に理解できる力の代表です。これは重力の加速度を掛けた単位ですので、理論的に扱うときは力の S I 単位であるニュートンが提案されるようになりました。これが、典型的な理論と実用との間の解釈問題として議論になりました。代数式を扱う限りでは問題にならないのですが、数値で理解する段階で混乱します。もともと、力は眼に見える実体がありませんので、力が作用している結果として起きている変位や運動を見て、間接的に理解しなければなりません。部材内部で作用している力が応力です。実際にどのようになっているかは分かりません。これが**不静定**(statically indeterminate)の概念です。そこで、或る適当な仮説を立て、数学的に便利に扱うことができる理想的な**モデル**を考えて解析します。実際現象を正確に表すような精密なモデルを考えることは、科学的な態度ですが、実務に応用するならば、なるべく単純な仮説の方が勝ります。この判断に関して、理論家と実務家とがしばしば対立します。材料力学は、材料を均質な弾性体モデルと仮定し、解析原理式の出発を**フックの法則**に置きます。複雑な現象を説明するときの実用的な方法が幾つもあります。例えば、変形が大きくなるとフックの法則である線形弾性の性質から逸れますが、これを線形化して扱う考え方が、例えば、接線弾性係数や換算弾性係数です (5.2.2 項参照)。

11.1.3 線形理論が実用的であること

この章は、材料の応力と変形を扱う数学理論の紹介です。具体的な問題の解法については深入りしません。数値計算も例示しません。個別の問題は多くの研究者が論文を発表しています。何かのトピックを調べるには、論文の検索サービスを利用します。それらの論文を理解するとき、この章で説明してある基礎的な解説事項は、省いてあるのが普通です。理解を埋めるには、専門ごとの啓蒙書・教科書などを参考にしなければなりません。ただし、この目的の名著 (例えばティメションコ) は多くありません。線形理論を踏まえると、多くの実用的な理論を使うことができます。とりわけ重要なものは、保存系としての性質であるエネルギー法の応用です。線形であるとき、影響線解析や重ね合わせの方法が使えます。線形理論が応用できれば、再現性が保証されますので、未だ一度も実現していない構造物の設計に挑戦することができます。現在でも健全なイギリスのフォース鉄道橋は、保守的な経験主義にこだわれば、絶対に建設できない、超巨大な構造物です。しかし、また、フォース橋を超えようとして計画されたカナダのケベック橋が、線形理論の盲点である座屈で崩壊する経験も技術史に残りました。

11.2 均質な弾性体の解析モデル

11.2.1 解析の条件

力の受けても壊れないように材料を使う範囲ならば、同じ使い方は、いつも同じ変形の性質を示します。これは再現性があることです。材料力学の研究は、実際の材料を使った実物での実験事実と、理論的に扱いやすい数理モデルとを組み合わせることで研究が発展してきました。材料が破壊されれば、そこで再現性が途切れます。破壊現象は例外が起きた場合と割り切って、再現性の有る範囲に限定しても、多くの研究課題があって、数学的な興味を引いてきました。弾性体を数学的に解析する条件は4つあります。力の①釣合条件(equilibrium condition)、力と変位の関係を扱う②弾性条件(elasticity condition)、③境界条件(boundary condition)、そして④適合条件(compatibility condition)です。この全体を構成側(constructive law)と言う用語を見るようになりました。個別に説明を補います。弾性条件は、フックの法則の拡張と考えます。境界条件は力と変位の両方があります。例えば、支点では、或る方向の変位が0である、また、梁や板の縁では曲げモーメントが0である、などです。適合条件は、幾何学的な意義があります。弾性体に複数の注目点を考えたとき、注目点間で歪み、または変位があっても、相対的な位置関係は変化しない、とする条件です。例えば、ゴム板に図形を描いて伸縮させるとき、線が切れる、交差が生じる、などが起こらない条件と考えるとよいでしょう。弾性体の解析は、幾何学的な次元の順でも分類します。最初は、線状の部材の引張と圧縮を一次元の問題として捉えます。これに使う弾性条件が古典としてのフックの法則です。ヤング率は、実験的に求めます。平面内の力と変形を扱うと二次元です。これを一次元の問題の応用として扱うのが、トラスと梁の解析です。このときに、釣合条件と境界条件が必要です。平面図形で表されるような均質な連続弾性体の、その平面内の応力と変形を扱うのが二次元弾性体です。このときの弾性条件にはポアソン比が必要になりますが、これも実験で求めます。立体構造になった連続体を一般的に扱うのが三次元弾性体です。実用的には境界条件が簡単な場合の解析が主に扱われます。板の曲げは、扱う弾性体が二次元の形状であっても、その面に垂直方向の変位を扱うので三次元の弾性問題に分類します。

11.2.2 独立な弾性常数の個数

均質な弾性体は、基本的に立体構造を構成しています。微分的に考えた立方体に作用している独立な応力度成分と歪み成分はそれぞれ6個あります。応力度と歪みとの関係を表す弾性条件は、一般化したフックの法則と解釈します。その弾性係数は、代数的に勘定すると全部で36個ですが、相反作用の法則があって、独立な弾性係数の数は21個です。第4章、式(4.1)に示した6元の連立一次方程式は、梁の解析を説明するときに紹介したのですが、弾性条件の表現式です。均質な弾性体を扱うときは、任意の直交座標変換をしても弾性係数の関係が同じ式になりますので、独立な弾性常数の個数は2で済みます。これが、ヤング率 E とポアソン比 ν です。剪断剛性係数 G は、 E と ν とで表すことができます。二次元の均質な連続弾性体の解析では、応力度成分と歪み成分の個数がそれぞれ3個です。応力度と歪みの関係(弾性条件)は、特に説明をしましませんでした。第3章3.2.2項で紹介してあります。

11.2.3 直交異方性の弾性体

鋼材は、どの向きで切り出したかに関係なく、均質な弾性体と仮定することができます。鋼の圧延材は、細かく観察すれば、圧延方向のクセを持つのですが、これを二次元弾性体として使うとき、部材の性質を左右するほどの影響はないと仮定しています。一方、木材は、方向性のある材料です。木目方向に剛性が高く、横方向は柔らかく、つまり相対的に剛性が低くなります。一般的な三次元の連続弾性体を扱う場合はめったにありませんが、力学モデルとして方向によって弾性係数の異なる直交異方性弾性体を考えることがあります。これは、独立な弾性常数の数は9個です。二次元の直交異方性の場合には4個です。この応力と歪みの関係式は、弾性条件ですが、一般化したフックの法則に位置付けます。普通の金属版は、材料力学では二次元の等方性材料として扱います。合板、通称で言うベニヤ板(プライウッド、plywood)は、直交異方性の板と見なせます。直交性は、座標軸方向の応力成分が剪断歪みには関係しない条件が成立するときを言います。座標軸方向の応力度によって、その方向と直交する方向に、ポアソン比に相当する横歪みが出ないモデルも考えられています。合板は接着剤で固めてありますが、すだれを縦横に組み合わせた性質の板構造は、剪断剛性が非常に小さな二次元弾性体です。これらのモデルは、構造物としては、薄い板材を縦横のリブ材で補強し、マクロに見て縦横の剛性が大きく異なる直交異方性板として解析することもあります。これらの材料を使う解析研究は、材料力学の課題ではなく、構造力学の方で主に研究されています。

11.2.4 梁の解析に使うグリーン関数

弾性体に力（応力度）が作用すると変形（歪み）が一意に決まり、複数の解がないことは、実は非常に重要な原理です。この逆に、変形が観察されれば、作用している力も決まります。例外が、圧縮を受ける柱の座屈です（第5章5.4節参照）。11.1.3節で、線形理論の盲点と表現したのは、仮想の変形を考えなければならないからです。解が一意に決まると言う関係を数学的に表すときは、力と変数との関係を表す何かの関数形が定まっていることを意味しています。力をベクトル的な成分としての集中力として或る作用点に加え、注目している点の変形を、これもベクトル成分とすると、或る個数の注目点全体の力と変形の関係は、実用的にはマトリックスで表すことができます。これは、第4章、式(4.1)に示したマトリックスがその一例です。梁のような連続体を考えるとき、撓みを求める注目点は梁の連続座標位置 x であり、単位の集中荷重が梁の上を移動するときの荷重位置 x' との二つの連続変数を決めて注目点の撓み y を求めます。概念式は $y = G(x, x')$ と表記することにします。任意の荷重 $p(x')$ が作用するときの梁の変形は、解析原理的には、積分方程式の形で計算します。

$$y(x) = \int G(x, x') p(x') dx' \quad \dots(11.1)$$

式(11.1)の形で考える $G(x, x')$ を グリーン関数 (G. Green, 1793-1841) と言います。構造工学の参考書や公式集には種々の条件での解が載っています。これらは、解析的に言えばグリーン関数の種々の解を実用式で示した、と解釈するのがよいでしょう。解析的に整理するときは、 x と x' とを入れ替えても同じ式になる対称性があるように整理します。これが、構造力学での 相反作用の法則 に当たります。なお、荷重 $p(x')$ を集中荷重とすると、これは $x = x'$ のときだけ1で、 $x \neq x'$ であれば0となる特別の関数ですが、これをディラック (P. A. M. Dirac, 1902-1984) の デルタ関数 (δ 関数) と言います。単純梁の場合の数値計算に応用するときは、 G も p フーリエ級数による展開式が使えます。

11.2.5 線形の微分方程式を母関数とする

グリーン関数は、2階または4階の偏微分方程式を出発として境界条件を考えて解きます。梁の解析では、下に示す梁の曲げ変形の4階の微分方程式です。これをグリーン関数の 母関数 と言います。

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x) \quad \dots(11.2)$$

母関数が線形式であるときに限り、解の一意性が成立します。一個の集中荷重が作用するときの解を代数的に解くとき、4階の微分方程式は4個の積分定数を決めなければなりません。この系は、集中荷重の作用点の左右で二つの解を求めます。梁の場合、支点位置での境界条件が4つ、集中荷重の作用位置の左右で関数の連続性のために4つの適合条件を使います。これらの条件の中に、釣合条件が勘案されています。

11.2.6 数値計算にはマトリックスが使われる

具体的に梁の変形を数値として計算したいときは、注目点を、連続座標ではなく、有限個数の、或る飛び飛び (discrete) の座標位置で考えます。そうすると、実用的にはマトリックスを扱います。式(11.1)は概念式です。数値計算に使うときは、或る個数の有限個の注目点での解を扱いますが、これがマトリックス形での表現になります。式(4.1), (4.2)の表し方を見て下さい。これは、二変数関数 $G(x, x')$ をマトリックスの形で表した例です。これをFEMでは変位のマトリックス (flexibility matrix) と言います。このマトリックスの 逆マトリックス が得られれば、任意の変形が与えられたときの荷重の大きさが一意に決まります。ここで、「逆マトリックスが得られれば」と仮定法で説明したことに注意して下さい。コンピュータを使うとしても、数値計算の場では、注目点の数が非常に多くなると、逆マトリックスの計算結果が実際には誤差が大きくなって使いものにならないことが起こります。元のグリーン関数で逆マトリックスに相当する表現式は、下の形で提案できます。

$$p(x') = \int F(x', x) y(x) dx \quad \dots(11.3)$$

ここでの $F(x', x)$ は逆マトリックスに相当する関数とします。そうであると、元のマトリックスと逆マトリックスとの積が単位行列になることの関係式は、下の式の形になるはずです。

$$\int F(x', x) G(x, x') dx' = \delta(x) \quad \dots(11.4)$$

いま、単純梁を例として考えます。 $G(x', x)$ のフーリエ級数解が得られたとした場合、高次のフーリエ係数の大きさは微小になっていきます。 $F(x', x)$ のフーリエ級数解の係数は、逆に高次の項が無限に大きくなっていきますので、数値計算に使うことができる意味の有る解は得られません。

11.3 二次元弾性体の解析

11.3.1 二次元弾性体の問題

二次元の均質な連続弾性体の解析で、代表的な問題の例を三つ示します (図 11.1 参照)。いずれも、幾何学的な境界条件が扱い易くなっています。(a)は、引張応力を受ける板に円形の穴が空いているとき、断面積が最小になる穴の周での応力度が、断面の平均応力度よりも、どれだけ大きくなることを解析するモデルです。板に穴を空けてリベットで継手を設計するときの参考にするため、解析が研究されました。(b)と(c)は、部分的にはヘルツの接触として紹介したモデルです (第6章 6.4 節参照)。(b)は、地盤の支圧分布を解析するときの扱うモデルです。数学的には、集中荷重の直下が特異点です。コンクリートの引張り強度試験をするときのモデルが(c)です。円柱は、引張応力度によって縦に割れますが、その引張応力度の発生する解が解析されます。これらの解析は、材料個別の特性を捨象して、数学モデルだけで研究ができますので、専門分野としては応用力学の問題として多くの研究があります。具体的に数値として大小関係を知りたいとなると数値計算技術の課題として取り上げられます。こちらは、さらに、コンピュータの利用方法の研究、特にFEMの利用技術として研究されるようになりました。これらの詳細な説明には、かなりのページ数が必要ですので、この節はお話だけに止めます。

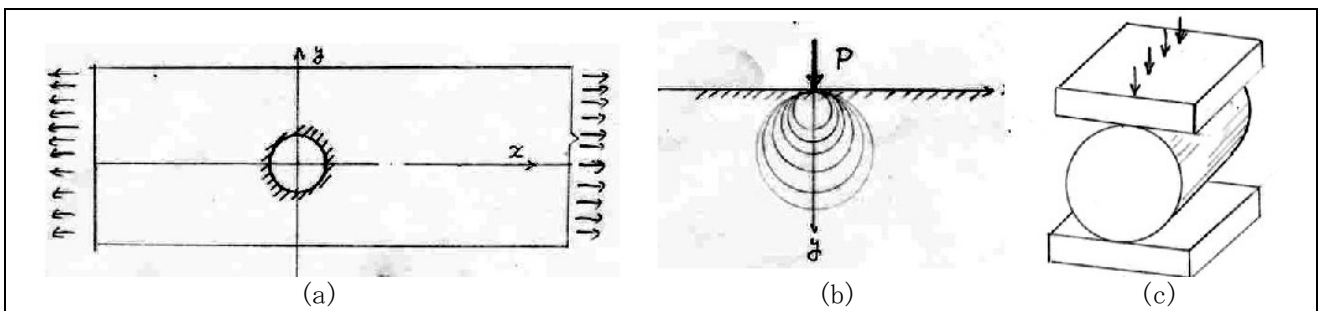


図 11.1 二次元弾性問題として扱う例

11.3.2 釣合条件の整理に応力関数が使われる

弾性体の解析では四つの条件を考えることを前節の始めに紹介しました。梁やトラスの解析をするときは、注目点として任意の一次元の座標位置に外力が作用することを扱います。その外力には、自重も含まれます。二次元弾性体の解析では、注目点が二次元で表す座標 (x, y) です。外力の作用は、すべて境界条件の方に含め、弾性体の内部で作用することをしないことに注意します。図 11.1 で、このことを確認して下さい。弾性体内部で材料の重量を扱う必要があるときは、これを**物体力**とします。弾性学の参考書では釣合条件式の中に含めた式で紹介されていますが、実用的な意義はほとんど無いと言ってよいでしょう。二次元の連続体は、構造力学的に見れば、巨大な不静定構造物の性格がありますので、トラスの格点のような有限個数の座標点での釣合式とは異なり、微分レベルでの単位正方形を考えて、力の釣合を扱います。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \dots(11.5)$$

この基本式を、エアリー (G.B. Airy, 1801-1892) は、応力関数 ϕ (stress function) を使う形に整理しました。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \dots(11.6)$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad \dots(11.7)$$

応力関数 ϕ が、代数的にどのような形で表現され、また、その力学的な意味をどう解釈するかについては、この式の範囲ではよく分かりません。つまり、後で説明する境界条件を考えなければ、この式だけでは、二次元弾性体の正確な解は求まりませんが、近似的な応力度分布を求めるときに使うことができます。とは言え、数学的な道具として、式(11.7)の形の美しさが好まれています。

11.3.3 二番目として弾性条件を使う

弾性条件は、フックの法則の一般化です。第3章、式3.3で紹介しましたが、まとめの意味を含めて整理した形で示します。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau \end{array} \right. \quad \dots(11.8a), \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma \end{array} \right. \quad \dots(11.8b)$$

上の式で、左側の式 11.8a の方が力学的な意義を持ちます。つまり、力が作用すれば変形が出ることを表す式だからです。これを、代数的に連立方程式と解釈して、逆向きの解を求めたのが、右側の式 11.8b です。こちらは、変形が分かれば力が計算できる、と言う式です。実際の弾性体では、力がどのように作用しているかは分からないことが多いことを 11.1.2 項で説明しました。平面弾性体の力学を扱う場合の一般的な仮定は、板の厚み方向の応力を、 $\sigma_z=0$ とします。そうであると、矩形断面の梁の曲げを扱うとき、厚み方向の歪み ε_z は、ポアソン比が効いて、圧縮側では広がり、引張り側では縮み、矩形断面の形状は台形に変形します。幅が十分に広い矩形断面の一樣曲げを考えると、厚み方向の歪みが、 $\varepsilon_z=0$ の条件になります。この場合は、厚み方向の応力度 σ_z が 0 にはなりませんので、式(11.8)のヤング率とポアソン比を定義し直した形にして応用します。したがって、話は前後しますが、三次元の連続弾性体の応力と歪みの弾性条件式の形を理解しておきます。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx} \end{array} \right. \quad \dots(11.9a), \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{(1+\nu)E}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_y = \frac{(1+\nu)E}{1-2\nu}[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_z = \frac{(1+\nu)E}{1-2\nu}[\nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z] \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} \end{array} \right. \quad \dots(11.9b)$$

11.3.4 適合条件は変位の性質を規定する条件

三番目の条件として、変位の性質についての条件を使います。二次元弾性体の或る個所(x, y)の変位を、座標軸方向の成分に分けて(u, v)で表すと、歪みは、次の式で定義されます。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad \dots(11.10)$$

適合条件は、隣接する弾性体の座標間で相対的な位置の入れ替えが起こらない、とする条件です。微分レベルで扱う式は、

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \quad \dots(11.11)$$

11.3.5 境界条件を考える

二次元弾性体の解析の目標は、或る荷重条件のとき、変形よりも、応力度の分布を知ること重点があります。変形は、任意の個所での変位成分(u, v)として、前項の式(11.10)に使われています。解析の手順としては、u と v とに関して微分方程式を求め、その解を得ます。(u, v)の解析解が得られれば、式(11.10)から歪みが得られ、それを式(11.8b)に代入することで、応力度が計算できます。境界条件は、主に図形としての外周で、周に直交する方向の垂直応力度と周方向の剪断応力度が0です。円形の周を持つ形状の場合には、上で紹介した条件式で使われている直交座標系を極座標に変換した方が便利です。この表現式の紹介はここでは省きますが、応用力学の参考書に見ることができます。境界条件を考えなくても応力度分布が得られる一つの例として、図 11.1a に示した穴あき板の穴周辺の応力度分布を、エアリーの応力関数、式(11.6)、式(11.7)だけから求めることができます。無限に広い二次元応力度の場合に、円孔が一つ空いていて、全体が x 軸方向に一定の引張り応力度 σ_0 を受けているモデルは、境界条件が簡単になります。

半径 r の円孔の周辺における応力度の解は、種々の参考書に紹介されています。y 方向で見た x 軸方向の応力度は次の式が得られています。

$$\sigma_x = \frac{\sigma_0}{2} \left(2 + \frac{r^2}{y^2} + \frac{3r^4}{y^4} \right) \quad \dots(11.12)$$

ただし、 $y \geq r$ の条件があります。穴の周では、最大で平均応力度の3倍の応力集中が起きることが理論解として得られます。実際の鋼板では、この局所的な応力度は、降伏点を超えない範囲で平均化が起きます。また、静的な破断強度は、最小断面積が全体で一様な降伏点になったとした強度を示すことが実験的に知られています。

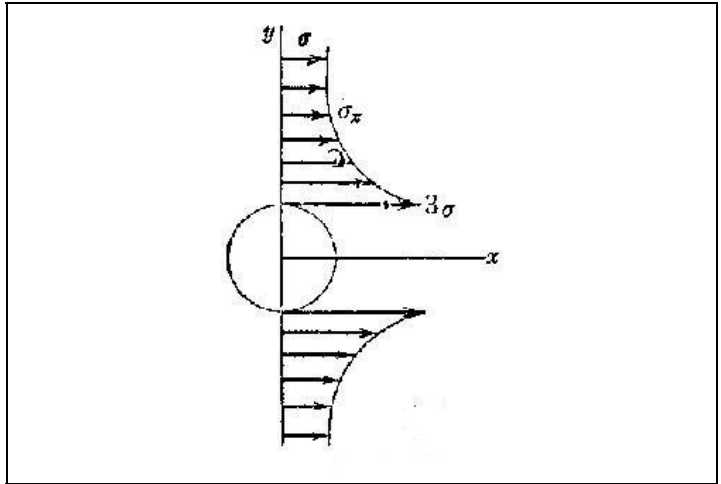


図 11.2 孔を挟む最小断面の応力度分布

11.3.6 微分式に代えて差分式も研究される

微分方程式(differential equation)に出発して、解析的に解が得られるのは、実は非常に条件に恵まれた場合です。そうであっても、具体的に数値として計算する段階で、計算技術でも多くの課題があります。応力を計算したい座標は、実際には或る飛び飛び(離散的: discrete)の位置です。そこで最初から離散的な位置で理論式を構成することも研究されてきました。その一つが差分方程式(階差式: difference equation)での表現です。梁の解析の場合には、微分方程式の解と正確に一致する結果が得られるような差分式の表現法があります。クラペロン(B. P. E. Clapeyron, 1799-1864)の論文が基礎になった三連モーメント式(three moments theorem)がその例です。差分方程式を二次元弾性体の解析に応用するときは、梁の場合のような厳密解を提案することができませんので、近似計算法として実用されます。微分方程式を階差式で近似するときは、偶数階の微分方程式を扱うときに扱い易い形になります。一定間隔 λ の注目点では、微分方程式と差分方程式とを次の形で対応させます。注目点の座標位置は整数座標 j です。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &\rightarrow (\phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}) \frac{1}{\lambda^2} \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} &\rightarrow (\phi_{j-2} - 4\phi_{j-1} + 6\phi_j - 4\phi_{j+1} + \phi_{j+2}) \frac{1}{\lambda^4} \end{aligned} \right\} \dots(11.13)$$

ここまでの解析研究は、コンピュータが利用できるようになって大きな変化が起きました。その代表が有限要素法(FEM)の利用です。FEMは、差分方程式の考え方の延長に位置づけることができます。しかし、注目点を選ぶとき、任意図形の境界条件に合わせるように注目点を選ぶ自由度があるのが便利です。ただし、FEMも近似計算法の性格がありますので、計算結果の評価について、正確な解析法との誤差が論議の種になります。

11.4 薄板の曲げ変形

11.4.1 板の曲げは二次元弾性と同質であること

三次元的に扱う弾性体の問題の一つに、薄板の曲げがあります(図 11.3)。この力学モデルは、板の厚み方向を薄く切り出して考えると、二次元弾性モデルを積み重ねた応力状態になっていることが分かります。板の曲げを扱う数学モデルは下の式です。

$$\begin{cases} M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \dots(11.14)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad \dots(11.15)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \dots(11.16)$$

ただし D は、単位幅の板の曲げ剛性です。

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots(11.17)$$

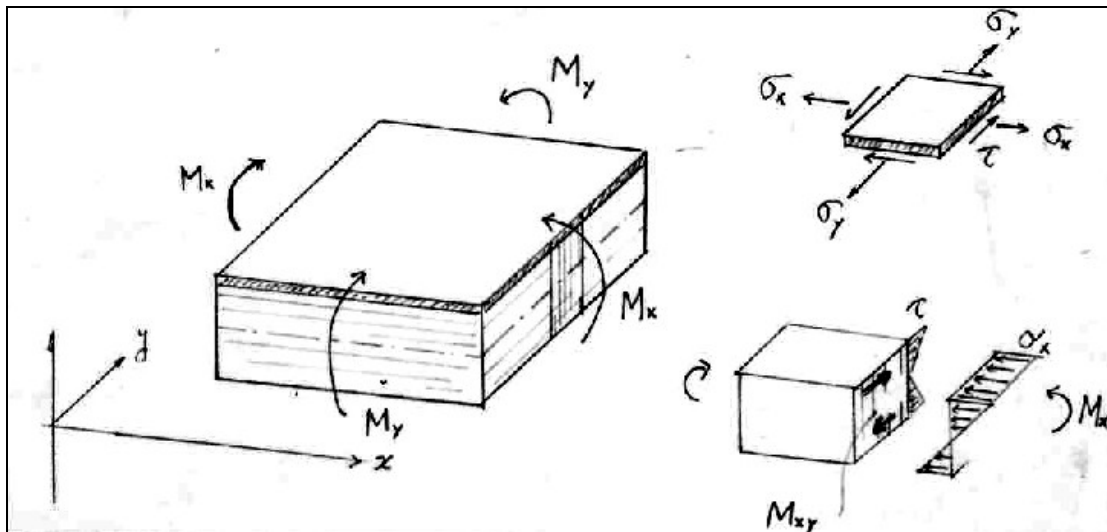


図 11.3 板の曲げ

これらの式の形は、二次元弾性体の式と比較してみると、相似になっている部分と、微妙に異なっている部分とがあります。まず、式(11.14)と式(11.8b)とが対応した関係になっています。つまり、式(11.14)は、板の曲げを扱うときの弾性条件であることが分かります。式(11.15)は、式(11.5)と対応した釣合条件です。二次元弾性体の場合には物体力がありませんが、板の曲げでは板面に垂直な荷重分を考えた式になっています。式(11.16)は、 $w \rightarrow \phi$ と置くと左辺の式の形がエアリーの応力関数と同じです。つまり、釣合条件式です。ところが、式(11.6)の σ_x 、 σ_y の偏微分式を見ると、 x と y の使い方が逆ではないかと疑問に思う逆順の表現になっています。最後に、式(11.16)の形は、グリーン関数の母関数、式(11.2)に対応している表現です。式(11.16)の変形 w の解は、座標の表現が二次元になっていますが、式(11.1)のグリーン関数 G の意義を持つ式です。具体的に w を求めるときは、板の境界条件を必要とします。

11.4.2 直交異方性板モデル

構造物の設計では、通路に使う床版(floor slab)を、マクロに見て、均質な弾性板にモデル化して断面の応力度の検証をします。漢字の使い方としては、板(plate)は力学用語、版(スラブ、slab)は構造材の意義で使い分けをします。細かく見れば、厚みを抑えて版の材料を節約し、縦横に補剛する桁材または肋材(リブ)を使うことがあります。この全体を均質な板と置く数学モデルを直交異方性板(orthotropic plate)と言います。補剛に使う桁の剛性が大きい場合には、解析の主体を骨組み構造、または格子構造として解析します。これらは、構造力学の方で扱います。等厚の鉄筋コンクリートスラブは、縦横に鉄筋を入れますが、普通的设计モデルでは直交異方性を考えません。ただし、鉄筋量の計算には、縦横2方向で、力学的に独立したスラブが合わさったと考える二方向スラブの仮定が使われます。縦横で曲げ剛性が異なるモデルは、縦横の座標軸の尺度を変えることで数学的には等方性板モデルの解を利用することができます。直交異方性板の数学モデルは下の形です。

$$\begin{cases} M_x = D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_y = D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} = H \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \dots(11.18)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad \dots(11.19)$$

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad \dots(11.20)$$

ただし、次の条件があります

$$H \leq D_x D_y \quad \dots(11.21)$$

細かいことを言えば、捩じりモーメントは M_{xy} と M_{yx} とは等しくありませんし、捻じれ剛性も縦横二方向で同じではありません。式(11.21)は、適合条件に当たります。直交異方性板を設計に応用する方法については、実用的な数値計算技術と関連した研究があります。これには、「標準的な橋の設計計算書を作成するエクセルSoft」のシリーズで詳述してあります。

11.4.3 薄板の座屈問題と設計上の提案

板を圧縮応力状態で使うことは、柱を並べた状態でモデル化することもできます。柱と異なることは、幅方向の境界条件も考えることです。結論から先に言うと、実用されている鋼部材の板厚と板幅の寸法比は、弾性座屈を起こさない条件で決めています。SS400(旧SS41)材では、H形またはI形の圧延形鋼の腹部は、圧縮材として使うとき、板幅/板厚の比を約**40**にします。剪断力が大きくなる曲げ部材は、その比が約**60**です。曲げモーメントが大きくなる部材は、板の上半分が三角形の圧縮場、下半分が引張場になりますので、その比を約**120**まで広げた断面が使えます。H形鋼のカタログ製品では、したがって、圧縮柱用と、曲げ材に使う梁用と、二種類の寸法系列があります。山形鋼や、H形鋼、I形鋼のフランジ部分は、板幅方向の支持条件が、一端で単純支持縁、他端が自由縁です。この場合の板幅/板厚比は、約**12**で使います。降伏点が高い鋼材では、これらの比を相対的に低くします。薄い鋼板を幅広く使いたい場合には、上述した板幅/板厚比を満たすように補剛材を中間に入れます。40, 60, 120, 12の数値は、鋼構造物の設計者では常識として弃えておきます。

12. 三次元的に扱う弾性問題

12.1 経験で得られた知識

12.1.1 三軸圧縮応力状態では強度が上がる

部材の設計に、積極的に三次元的な応力状態の解析をする例は多くありません。経験的に知られていることは、柱を三軸圧縮応力状態にすると、強度が上がることです。木材の柱は、大きな軸方向の荷重を受けると縦割れを起こします。そのため、金具で巻いて横方向の膨らみを抑える例を見ます。鉄筋コンクリートの柱の細部構造では、断面の周に軸方向鉄筋を配置し、それを**帯鉄筋**で束ねるようにして横方向の膨らみを抑えます。帯鉄筋の配置が適切でないと、軸方向の鉄筋が籠をつぶしたように膨らみ、中身のコンクリートが飛び出し、柱が圧壊します。鉄筋コンクリート造のビルが地震時に崩壊するときに見られます。プレストレスコンクリートの柱や梁は、全体を籠状に構成する普通鉄筋の量を多くすることで、軸方向に大きなプレストレスを加えることができます。これらのコンクリート部材の表面は、その面に垂直な方向の応力度が0になっています。大きな応力が作用するとき、籠状に組んだ鉄筋の外側コンクリートで、かぶりに当たる部分が剥がれる破壊が先に起きます。この部分が三軸圧縮応力状態にないからです。**山はね**も同じ原理の破壊です。**支圧**は、或る狭い範囲に大きな圧縮荷重が作用するときを言うのですが、その範囲の外側が抑えの横方向の圧縮応力度として作用する効果が発生し、結果的に大きな支圧応力度に耐えます。ただし、大きな支圧応力度の作用面の境界では、局部的に剪断応力度が大きくなって凹みが生じ、さらにはパンチのような押し抜き剪断破壊が生じます。支圧の許容応力度を決めるときは、平均的な圧縮の許容応力度の1.5ないし2倍を超えないようにします。道路の舗装は、大きな集中荷重を分散させて、構造部材本体の支圧応力度が大きくなるようにする目的があります。砂や砂利は、それ自体は弾性体ではないのですが、舗装材の使い方をして、その下に作用する地盤への支圧応力度を低める目的があります。鉄道の砂利道床もそうです。伝統的な日本建築は、柱の直下に大きめの礎石を置きます。その下に砂利や玉石を敷き詰め、**よいとまけ**で固める作業をして柱の荷重を地盤に分散させます。古い巨木建築の遺構は、礎石を含めた基礎部分が他より丈夫な構造になっていますので、柱の位置が発見されます。

12.1.2 土嚢と蛇籠

砂利・砂・土は、引張強度には抵抗できない材料です。しかし、内部摩擦を利かせる圧縮場では、大きな力の伝達材として使うことができます。その方法の一例が、土嚢です。吉田徳次郎の有名な話があります。アメリカのイリノイ大学のタルボット研究室に留学していたとき、教授から、紙袋に砂を詰めたらどれだけの圧縮強度がでるか、の宿題が課せられました。色々理論を考えた末、分からないと返答しました。これに対して教授が、どうして実験をして調べなかったのかと、叱責されたそうです。これが、吉田徳次郎の、その後の研究態度を決定付けた大きな理由だそうです。また、河川の護岸工事には、細長い竹籠を組んで、それに大きめの玉石などを詰めた**蛇籠**（じゃかご）を使うことがあります。籠を組む職人がいなくなり、また近代的な工法とも思わなくなったのですが、竹以外の材料を使う例があって、現在でも評価されている、自然に優しい工事方法です。

12.1.3 円柱座標で扱う問題は二次元的な解析になる

構造物は、基本的に立体的です。その数学モデルを、大きく分けて、微分方程式を使う連続体として扱う場合と、隙間が多く取れる骨組みで扱う場合とで区別します。材料力学の課題は、連続体としての見方の方に焦点を置き、構造力学は、骨組みの解析を主としている、と分けることができます。この分け方は、解析に使う理論モデルを組み立てるときの便宜的な分類です。FEMは、連続体を骨組みモデルに置き換えます。柱・梁・板は、立体構造物を部材の集合に分けて、解析的に扱い易くする分類です。前章の第11.3節は、この分類に含まれない、微分方程式を使う二次元の連続体を扱う場合です。例として、図11.1を示しました。改めて三次元弾性体の問題として見ると、次のような課題に相当します。図11.bは、解析モデルとして、紙面に垂直な線状の荷重が作用していることを示したのですが、広い平面状の地盤に集中荷重が作用するときの問題として見て下さい（第6章、図6.7参照）。三次元的に扱うとき、**円柱座標**で扱うと、二次元弾性体と相似の扱いができます。図11.aは、図11.bの向きを90度回転させて、地盤の或る深さのところに球状の空間があるときの解析問題と見ることができます。上に載る**かぶり**の厚さによって、球内面に引張応力場がでます。図11.1cは、ヘルツの球面接触に対応します（第6章、6.4.4、表6.6参照）。これらの解析では**球座標**を使うのが便利です。

12.2 螺旋鉄筋コンクリート柱

12.2.1 袋に中身を詰めた柱

お米を運ぶときの入れ物に、以前は藁で編んだ俵を使いました。現在では、紙・目の細かい布網・ビニールなどが使われていますが、積み上げても破れない丈夫さがあります。ここで、思考実験として、お茶の葉を保存する円筒形の薄いブリキ製の茶筒を考えて下さい。これに水を入れて密閉すると、非常に丈夫な柱になります。水圧 p は、単位高さ当たり、半径 r の茶筒のブリキ板のフープテンション $T = p r$ と釣り合います（第1章、1.5節参照）。ブリキの板厚を 0.15mm 、茶筒の半径を 4cm 、鋼の応力度を $\sigma = 1000 \text{ kgf/cm}^2$ で使うと、水を詰めない場合の耐荷力は 380kgf です。茶筒に水を詰めると、同じく引張応力度を 1000 kgf/cm^2 まで許すと、水圧分として $p = 3.75 \text{ kgf/cm}^2$ に耐え、余分に約 190 kgf の圧縮力を持たせることができます。水に代えて砂を詰める場合を考えます。砂は内部摩擦を持つ材料です。仮に摩擦角を 45 度とすると、上下方向の圧縮力の 35% で横方向に圧縮応力度を作用させれば破壊変形を起こしません。この状態では、砂柱として $3.75/0.35 = 10.7 \text{ kgf/cm}^2$ に耐えますので、茶筒自体の耐荷力を考えるまでもなく、約 540kg の耐荷力を持たせることができます。この原理が鉄筋コンクリート螺旋鉄筋柱に応用されます。

12.2.2 螺旋鉄筋柱の耐荷力の計算原理

螺旋鉄筋を使う鉄筋コンクリート柱の設計は、螺旋鉄筋の力学的な作用が、上の項で説明した砂柱を囲う円筒になることで、裸のコンクリート柱よりも耐荷力が增加することを計算に入れます。 A_{SP} を螺旋鉄筋の断面積、螺旋が描く円の直径を D 、高さ方向のピッチを s とします。薄肉のパイプに換算すると板厚は A_{SP}/s 、柱の軸方向の断面積に換算すると、 $\pi D A_{SP}/s$ になります。コンクリートが終局強度になると、原理的には砂と同じと仮定できます。鉄筋コンクリート螺旋鉄筋柱の耐荷力の実用設計式は、螺旋鉄筋の強度の寄与が、軸方向の鉄筋の 3 倍（上の項で導いた、 35% の逆数）になるとして計算することが提案されています。

演習例題 12.1

- 図 12.1 に見るように、円筒形の紙袋に乾いた砂を詰め、圧縮力 P を作用させる。紙袋が破れる寸前において、軸応力度 σ_1 と、紙が横方向から拘束する応力度 $\sigma_2 = \sigma_3$ との比を求めよ。ただし砂の内部摩擦角を 45 度とする（図 9.6 を参照）。このモデルは、螺旋鉄筋コンクリート柱の耐荷力の計算式に応用されている。
- 円柱の直径を 30cm 、紙の円周方向の引張り強度を、単位幅当たり 10kgf/cm^2 とし、この円柱の強度を求めよ。

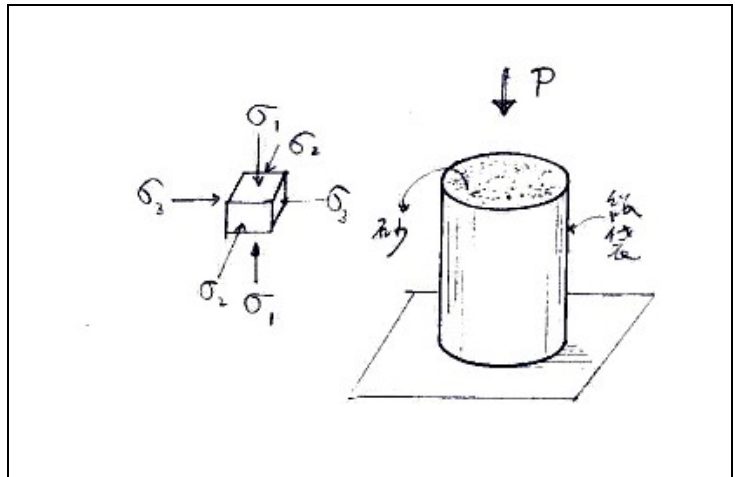


図 12.1 砂を円筒形の紙袋に詰めた柱

解説：

問題(1)の解は、図 9.6 のモール円の幾何学的図形から、主応力の大きさの比が計算できます。

$$\sigma_2 / \sigma_1 = (2 - \sqrt{2}) / (2 + \sqrt{2}) = 0.172$$

問題(2)では、まず、紙の強度で決まる、破壊時の横方向の拘束応力度 $\sigma_2 = \sigma_3$ を求めます。

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 2T/D = 2 \times 10/30 = 0.667 \text{ kgf/cm}^2$$

この応力度に対応する破壊時の軸方向の応力度は

$$\sigma_1 = \sigma_2 / 0.172 = 3.88 \text{ kgf/cm}^2$$

柱としての耐荷力は

$$P = \sigma_1 \pi D^2 / 4 = 2741 \text{ kgf}$$

12.3 構造力学の性質で解析する部材

12.3.1 二種の捩じれ剛性を持つ梁の捩じれ

梁や柱は細長い部材です。その解析モデルは、長さ方向の応力の性質として6種類を扱い、その応力度の分布も6種類です（曲げモーメント2方向、剪断応力2方向、軸力、捩じれモーメント）。この6種類に限定するための仮定を三つ使います。①フックの法則、②平面保持の仮定、③サンブナンの原理です（5.3.4項参照）。しかし、②の仮定は、部材断面のそりを考えると成立しません。そりは二種類の原因で発生します。一つは剪断応力度によるそり（第8.1節）、二つ目は、幾何学的な変形によるそりです（8.3.5項、図8.12参照）。前者によるそりは、サンブナンの原理で無視することができます。後者のそりは無視できない場合があって、これによる部材断面の応力度は、上記の6種類のどれにも属さない分布になります。と言うことは、この反りが出る部材は、二つ以上の単純部材の組み合わせた構造系の性質があることです。図12.2は、薄板をH形に組み上げた、ごく普通の断面形です。柱、または梁として使うときは単一部材として扱うことができます。しかし、捩じれを持たせる場合には、サンブナンの単純捩じれだけでなく、ワグナー曲げ捩じれの応力度分布を考えます。これが構造系の性質を持ちます。この梁を90°で軸回りに回転させた形状が、橋梁では2主桁橋の構造系のモデルであることが理解できれば納得できるでしょう。曲げ捩じれは、左右の主桁が逆向きの曲げを受け、左右主桁の逆向きの撓みが、見掛け上の捩じれ変形を起こすことです。H形断面の部材を、見掛け上、線状の構造物として解析するときは、捩じれ変形 ϕ を、単純捩じれ剛性（GK）の捩じれと、曲げ捩じれ剛性（EC）の捩じれと、個別に計算しなければなりません。剛性の計算式は、第8.3節に紹介しました。また捩じれ変形 ϕ の微分方程式の形は、8.4.3項に紹介してあります。

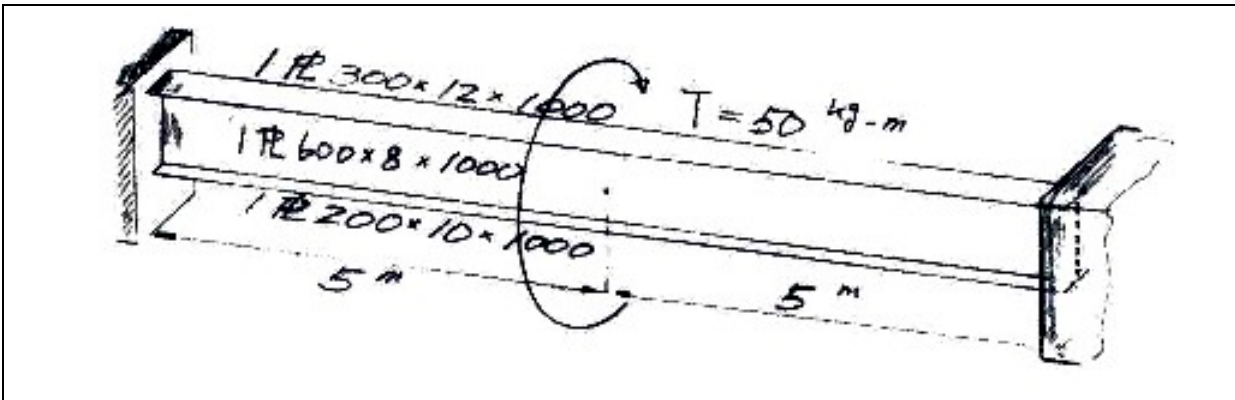


図 12.2 薄肉の板材で構成したH形断面の捩じれ

12.3.2 曲げ捩じれ変形の基本式

図12.2に示した力学系は、非対称なH形薄肉断面の梁が、捩じれに対して両端固定されている状態を例示しました。この捩じれ変形を計算する理論解を求めます。捩じれ変形の微分方程式は式(8.6)に示したのを使います。式を再掲し、一般解を下に示します。

$$EC \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - GK \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = m(x) \quad \dots(8.6)$$

右辺を0と置いた場合の一般解

$$\phi = a \sinh \lambda x + b \cosh \lambda x + cx + d \quad \dots(12.1)$$

ただし

$$\lambda = \sqrt{\frac{GK}{EC}} \quad \dots(12.2)$$

ここで、式(8.6)の形は、軸方向に一定の引張力が作用する梁と同じ原理式であることを理解して下さい。これと同じ形の式は、弾性吊橋の解析に使われています。この場合の式は、 ϕ を梁の撓み w 、GKをケーブルの水平反力 H 、 EC を梁の曲げ剛性 EJ と置き換えた形です。

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x) \quad \dots(12.3)$$

12.3.3 境界条件の仮定が理解し難いこと

上の項の説明を補います。簡易吊橋の解析は、別の資料で説明してあります。力学原理的に言えば、吊橋は、二つの構造系の間状態を表します。一つは、 H の大きさが小さくなった極限が、通常の曲げ剛性 EJ を持つ梁になる構造。もう一つは梁の曲げ剛性に期待しない場合であって、引張力を受けるケーブルの性質になります。後者の吊橋を無補剛吊橋と言い、歩道専用の吊橋に見られます。吊橋の解析では、梁の境界条件として、通常は、支点上で撓み w と曲げモーメント（撓みの2階微分）とが0であるとして解きます。梁の捩じれの力学モデル(図 12.2)を見ると、両端固定梁の境界条件を考えています。吊橋の構造としてこの境界条件になることはありませんが、三径間の吊橋を考え、補剛桁を三径間連続としたとき、中央径間の補剛桁が近似的に両端固定梁になります。これは、構造力学的には二次の不静定問題です。一般的な条件を考えてこの問題を解くとなると計算式の誘導が面倒です。図 12.2 の捩じれの問題に戻ります。これは、両端固定梁を補剛桁とする吊橋と同じ形で数式を扱うことができます。支間中央にトルク荷重を作用させるとして、左右対称にして境界条件を簡単にすれば、支間の左半分を考えることで済ませることができます。解析条件を次のようにします。

- ・左の支点 ($x=0$) : $\phi=0, \phi'=0$
- ・支間中央 ($x=L/2$) : $\phi'=0, \phi''$ は、 $x=0$ での ϕ'' の符号を変えた大きさ
- ・($0 < x < L/2$) の区間の捩じりモーメントは、外力トルク T の $1/2$
- ・この区間の梁の捩じれ変形 ϕ は、支間の $L/4$ 点に対して点対称です。(なお、支間の記号に L を使い、小文字を避けた理由は、数字の1と間違えないようにしたためです。)

支間中央 $x=L/2$ の座標での捩じれ角度 ϕ の解は次式です。

曲げ捩じれ剛性 $EC = 0$ の場合の解

$$\phi = \frac{TL}{4GK} \quad \dots(12.4)$$

単純捩じれ剛性 $GK = 0$ の場合の解

$$\phi = \frac{TL^3}{192EC} \quad \dots(12.5)$$

両方の捩じれ剛性を考えた場合の解

$$\phi = \frac{TL}{4GK} \left(1 - \frac{\frac{4}{\lambda L} \sinh \frac{\lambda L}{4}}{\cosh \frac{\lambda L}{4}} \right) \quad \dots(12.6)$$

12.3.4 支点でそりが拘束されない場合の解

二主桁のプレートガーダーを擬似的にH形断面と仮定したとき、支点上でダイヤフラムの拘束がありません。捩じれ角の解は下のようになります。

曲げ捩じれ剛性 $EC = 0$ の場合の解

$$\phi = \frac{TL}{4GK} \quad \dots(12.7)$$

単純捩じれ剛性 $GK = 0$ の場合の解

$$\phi = \frac{TL^3}{48EC} \quad \dots(12.8)$$

両方の捩じれ剛性を考えた場合の解

$$\phi = \frac{TL}{4GK} \left(1 - \frac{\frac{2}{\lambda L} \sinh \frac{\lambda L}{2}}{\cosh \frac{\lambda L}{2}} \right) \quad \dots(12.9)$$

演習例題 12.2

図 12.1 に示した力学系の数値計算を、手順を追ってまとめます。

(i) 水平方向の剪断力による剪断中心の計算 (腹板の影響を無視します)

番号	板幅	板厚	横軸距離			剪断流面積	偏心距離	モーメント
	b (cm)	t (cm)	x (cm)	$\Delta q = btx$	q	Σq (cm ³)	y (cm)	$y \Sigma q$ (cm ⁴)
1				0	0			
1-2	15	1.2	7.5	135	135	1350	30.6	41310
2-3	15	1.2	-7.5	-135	0	1350	30.6	41310
2-5	60	0.8						
4				0	0			
4-5	10	1.0	5.0	50	50	333	-30.5	-10156
5-6	10	1.0	-5.0	-50	0	333	-30.5	-10156
備考(*1) : y 軸回りの断面二次モーメント				$\Sigma =$		3366 (*1)	$\Sigma =$	62308

戻り中心 y 座標 : $y_c = 62308 / 3366 = 18.5\text{cm}$

(ii) 戻り中心からの反り分布 (腹板の反りは 0 です)

番号	板幅	偏心距離		反り w	板厚	剪断流 q	剪断流量	モーメント
	b	r	$\Delta w = br$	$\Sigma \Delta w$	t	$\int wt$	$Q = \int q$	Qr
	(cm)	(cm)	(cm ²)	(cm ²)	(cm)	(cm ⁴)	(cm ⁵)	(cm ⁶)
1		12.1	0	-181.5				
1-2	15	12.1	181.5	0	1.2	1361	13610	16468
2-3	15	12.1	181.5	181.5	1.2	1361	13610	16468
2-5	60	0	0	0	0.8	0	0	0
6				-490				
6-5	10	49.0	490	0	1.0	2450	16333	800317
5-4	10	49.0	490	490	1.0	2450	16333	800317
備考(*1) : 曲げ戻り剛性分の C の計算							$C = \Sigma =$	1633570 (*1)

(iii) 単純戻り剛性 K の計算

番号	板幅	板厚	剪断流 q
	b	t	$bt^3/3$
	(cm)	(cm)	(cm ⁴)
1-3	30	1.2	17.28
4-6	60	0.8	10.24
2-3	20	1.0	6.67
$K = \Sigma =$			34.19

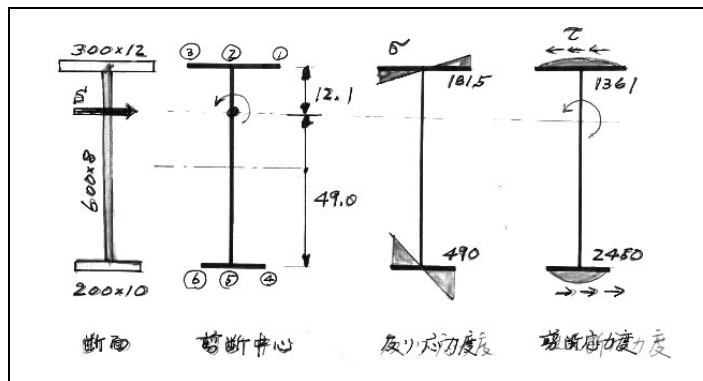


図 12.3 曲げ戻りによる応力度分布

(iv) 撓み角の計算

$$\lambda L = 500 \times \sqrt{0.8 \times 10^6 \times 34.19 / 2.1 \times 10^6 \times 1633570} = 1.412$$

支間中央の撓み角 ϕ (度)	
両端拘束	両端自由
C=0 の場合 : 4.06	C=0 の場合 : 4.06
K=0 の場合 : 0.09	K=0 の場合 : 0.36
λL を代入 : 0.16	λL を代入 : 0.81

反りによる軸応力度は、両端自由の拘束条件の場合、支間中央で

$$\sigma = (T L / 4) (w / C)$$

最大応力度は、下フランジ④の個所で

$$\sigma = 187 \text{ kgf/cm}^2$$

12.4 コイルバネの弾性

12.4.1 捩じりを考える変形

機械装置は、図 12.4 のようなコイルばねがよく使われます。材料の鋼丸棒に作用する応力は、荷重 P による剪断力と、捩じりモーメントです。荷重 P によるバネの撓み量による仕事は、針金全長の歪みエネルギーと釣り合います。単位長さの鋼棒の歪みエネルギー U は、鋼棒は、捩じりモーメント T と剪断力 P による、いずれも剪断応力度によって内部に蓄積され、バネの変形による撓みに δ に対して荷重 P がした仕事と等しいと置きます。

$$U = \frac{P\delta}{2} = \frac{T^2}{2GJ} + \frac{P^2}{2GA} \quad \dots(12.10)$$

J は鋼棒円断面の慣性モーメント、 A は鋼棒の断面積です。トルクと剪断力とは、どちらも断面の剪断応力度の分布に違いがありますが、独立に作用すると仮定します。螺旋を描く円の直径を D 、螺旋の巻き数 N 、材料の円断面の鋼棒直径を d とすると、バネ定数 K は下のようによ得られます。

$$\frac{1}{K} = \frac{8ND^3}{Gd^4} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] \quad \dots(12.11)$$

上の式で、右辺の第 2 項は剪断力による変形分を表しますが、小さな値になるので、通常は無視した式で紹介されています。剪断応力度の大きさは次式です。

$$\tau = \frac{16}{\pi d^3} T = \frac{8D}{\pi d^3} P \quad \dots(12.12)$$

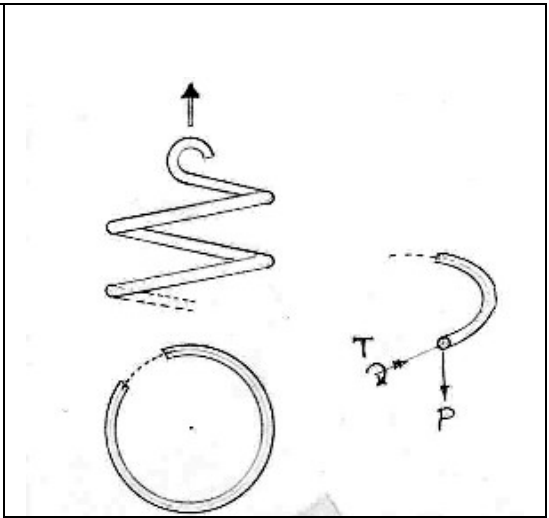


図 12.4 コイルばねの応力

演習例題 12.3

- (1) 長さ 1m 、直径 $d = 4\text{cm}$ の鋼の丸棒に、トルク $T = 100\text{kgf}\cdot\text{m}$ を加えた。剪断応力度と捩じれ変形の角度をもとめよ。ただし $G = 8.1 \times 10^5\text{kgf}/\text{cm}^2$ とする。
解： $\tau = 796\text{ kgf}/\text{cm}^2$ 、 $\phi = 2.8$ 度。 (備考：回転の慣性モーメントは $J = \pi d^4/32$ です)
- (2) 直径 $d = 2\text{cm}$ の鋼の丸棒を、平均直径 $D = 20\text{cm}$ のコイルばねに製作した。巻き数 $N = 10$ として、 $P = 200\text{ kgf}$ による撓みと剪断応力度を求めよ。
解：撓み $\delta = 0.99\text{cm}$ 、 $\tau = 1274\text{ kgf}/\text{cm}^2$

終わりに

材料力学に数学理論を応用することは必要です。しかし、材料をその強度以内にあることを確認する数値計算ができないと、その理論は実用になりません。コンピュータが利用できるようになって、数値計算の労力が減るとの予測に反して、材料力学の計算手順は込み入っていて、汎用のソフトウェアの商品化がし難いことが分かってきました。この問題の解決は、表計算ソフトウェア、例えば MS-EXCEL、の機能が充実してきたことで、かなり改善されました。このソフトウェアは、古典的と見える手計算の経験があると、容易に利用できます。この著作での数値計算の例題は、ほとんどを電卓で進め、それを、なるべく表の形に整理してあります。したがって、この例題を表計算ソフトウェアに書き直すことは簡単にできます。もし、これらの数値計算を汎用のプログラミング言語で組もうとなると、手に余ります。MS-EXCEL を使った実践的な数値計算の例題も、WEB 上で公開しますので、合わせて参考にされることを希望します。