

易しくない 時系列解析のお話

構造物の振動解析をする場合を考えています

科学書刊株式会社:電子版の原稿

「橋梁 & 都市 PROJECT: 2016」(ISSN 1344-7084)

0. あらまし

日本語で単に**時系列**と言うときは、時間の経過に従って並べられた、複数成分の事象です。世俗的な例は、新聞に載っているテレビ番組の表がそうです。また、列車の時刻表も、代表的な時系列です。ダイヤと言うときは、鉄道の運行計画を表現した線図を指す専門用語になりました。ダイヤは、英語の **diagram**(**ダイアグラム**)を日本語化して言うときの用語です。元々は、時系列を視覚的に表現した線図一般を指します。線図の代数学的なモデルは、連続的な事象を表す**関数** (**function**) です。関数を $y = f(t)$ と表すとして、その媒介変数(パラメータ) t に時間を考えたものが時系列です。物理的な事象、例えば、風速の時間的な変動、構造物の振動などを解析するときの数学モデルは、連続関数の時系列を考えています。しかし、数値解析に使うデータは、飛び飛びの時間間隔の関数値に直した**数値並び**、または**数列**、で扱います。この処理を**離散化** (**discrete**)と言います。時系列をモデル化する連続関数に代えて、数値並びにしたものを、英語で **time series** と言います。**級数**は、英語の **series** の日本語訳です。級数は、何かの規則を持った数値の集合の意義ですが、規則性を持った連続関数の集合の総称にも使います。例えば**フーリエ級数**、**直交関数列**がそうです。このレポートで対象とする級数は、離散化して得られた数値列の**データ**の方です。このデータから、元の事象にどのような**統計的な性質**があるかを調べるのが、**時系列解析**です。ここで取り上げる時系列データは、橋梁や建物などの構造物を対象として、その振動を加速度計で測定し、**デジタル化**して得られた数値並び(級数)であって、物理的な単位を持っています。工学的な問題に時系列解析を応用するときは、この物理的な単位が持つ意義を理解しておく必要があります。データ解析の目的は、対象構造物の動力学的な性質を求め、その構造物の健全度の判定に役立てる資料を求めることにあります。一連の解析作業全体は、ハードウェア・ソフトウェア・ユーザインタフェースの総合されたシステムとして構成する必要があります。このレポートは、振動の時系列データをパソコンで解析処理をする際に理解しておく事柄を、「**お話**」の形でまとめました。

島田 静雄

目 次

- 0. あらまし
- 1. 時系列のデータ構造
 - 1.1 標本化
 - 1.2 オッシロگرامのデジタル化
 - 1.3 離散数学を応用する
 - 1.4 数値の精度
 - 1.5 データ保存のファイル仕様
 - 1.6 レコード個数の増加を制限する
- 2. プログラミングツール
 - 2.1 Visual Basic 6.0 での開発と実行
 - 2.2 グラフィックス処理
 - 2.3 解像度を理解しておく
 - 2.4 モニタ用とプリンタ用のデータ
- 3. 時系列データの統計処理
 - 3.1 解析用に取り出す標本数
 - 3.2 統計量と標準化
 - 3.3 測定装置側で起こるトレンドなどの補正
 - 3.4 単純梁の曲げモーメント計算でモデル化する
- 4. スペクトル解析
 - 4.1 代数学で扱うスペクトル
 - 4.2 パルスと白色雑音
 - 4.3 数値計算には離散値の並びを使う
 - 4.4 高速フーリエ変換の原理
- 5. 回帰性の計算に使うモデル
 - 5.1 統計解析の用語
 - 5.2 周期性と回帰性
 - 5.3 再現周期、再現確率、自己相関関数
- 6. 数値計算で留意すること
 - 6.1 センサの振動モデル
 - 6.2 センサの感度特性を理解しておく
 - 6.3 測定器側でハイカットフィルタを通す
 - 6.4 数値積分でバンドパスフィルタの実現させる
 - 6.5 フーリエ解析とフーリエ合成を使う
- 7. パソコンの作業環境あらまし

索引

(参照数字は、章・節の番号です)

英数字		子ウィンドウ	7	統計関数	1.3
1 質点の力学系	6.1	組み込み関数	4.3	閉じるマーク	7
A D変換器	1.4	風の息	3.3		
AR モデル	5.1			な行	
C S V形式	1.5	さ行		ナイキスト周波数	6.3
FFT	3.1	サンプリング周期	1.1	塗り絵	2.2
FWD試験	3.3	サンプリング周波数	1.1		
HELP	7	スペクトル	4.1	は行	
MDI 方式	7	センサ	1.4	ハードコピー	2.2
VB6	2.1	ソフトコピー	2.2	バイアス	3.3
Visual Basic 6.0	2.1	差分	1.3	ハイカットフィルタ	6.3
Windows	2.1	再現確率	5.3	バイナリー形式	1.5
		再現周期	5.3	バイプログラム	1.2
あ行		時系列	0	ハム音	6.1
アナログ信号	1.4	自己回帰	5.1	パルス	4.2
アンプ	1.4	自己相関関数	3.1	パワースペクトル	3.1
イラスト	2.2	識別子	1.5	ピクセル	2.3
エイリアシング	6.3	周期性	5.2	フーリエスペクトル	4.1
エクセル	1.3	重力の加速度	6.2	フーリエ係数	4.1
エコー	5.3	数値積分	3.3	フォーム	7
エネルギースペクトル	4.1	整数型	1.4	プリンタ	2.4
オッシログラム	1.1	線図	2.2	プルダウンメニュー	7
オペレーティングシステム	2.1	相関値	3.1	ポイント	2.3
位相角	4.2			白色雑音	4.2
移動平均	3.3	た行		標本	1.1
親ウィンドウ	7	ダイアグラム	0	表計算ソフト	1.3
		タイトルバー	7	不定積分	3.3
か行		ダッシュポット	6.1	平滑化	1.1
ガル	1.4	ツールバー	7	補間	1.1
グラフィックス処理	2.2	テキストウィンドウ	7		
グラフィックスウィンドウ	7	テキストエディタ	1.5	まやらわ行	
		デジタル化	0	マイクロフォン	6.2
こだま	5.3	デバイス	2.4	モニタ	2.4
コンソールウィンドウ	7	デバイスドライバ	2.4	ラグ	3.1
解像度	2.3	ドット	2.3	ランダム	1.2
回帰性	5.1	トレンド	3.3	リバウンド	5.3
確率過程	5.1	畳み込み積分	5.3	レーザプリンタ	2.3
関数電卓	4.3	代数学	1.3	レーダ	5.3
逆フーリエ変換	6.5	卓越振動	4.2	離散化	0
級数	0	単純梁	3.4	離散数学	1.3
強制終了	7	地震計	6.2	和分	1.3
減衰係数	5.3	直交	5.1		
固有振動	4.2	抵抗線ひずみ計	6.2		
		統計解析	5.1		

1. 時系列のデータ構造

1.1 標本化

振動は、時間的に連続した事象です。数学的なモデルは、連続関数です。或る時刻とその時刻で数値化した関数値との対が、一単位の標本 (sample) です。数値化することを標本化またはサンプリングと言います。振動解析に使うデータは、一定の時間間隔(サンプリング周期)で標本化した数値並びの集合です。最初の標本の時刻を別に記録しておいて、時刻のデータを除いた関数値だけの数値並びを扱います。サンプリング周波数は、周期の逆数です。200 Hz、1K Hzのように、測定器側で設定します。時系列のデータは、グラフに描かせて観察します。この線図を、機械的または電気・電子的に描かせたものをオッシログラムと言います。オッシログラムに描いたグラフから、手作業でデータを読み取るときは、波形の最大・最小・変曲点などの時間軸座標と波高との対で数値化します。その時間間隔は一定になりません。これを数値解析に向くように、一定時間間隔の波高並びに切り直す処理が必要です。これには二種類の方法があります。一つは、標本間の時間間隔が広い場合であって、中間時刻のデータを補間 (interpolate) します。もう一つは、逆に、短い時間間隔に多くのデータ並びが詰まっている場合であって、途中を間引いて、平均化または平滑化 (smoothing) します。

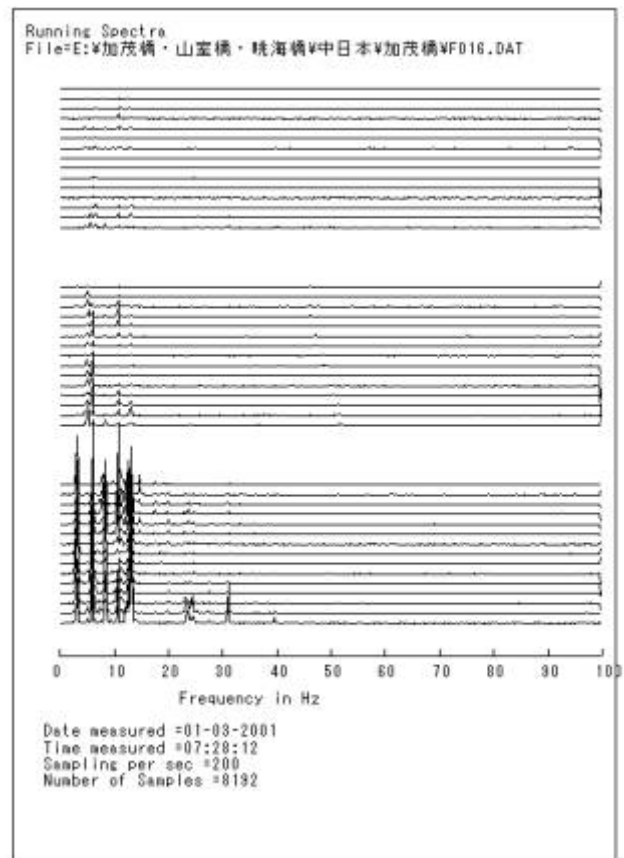
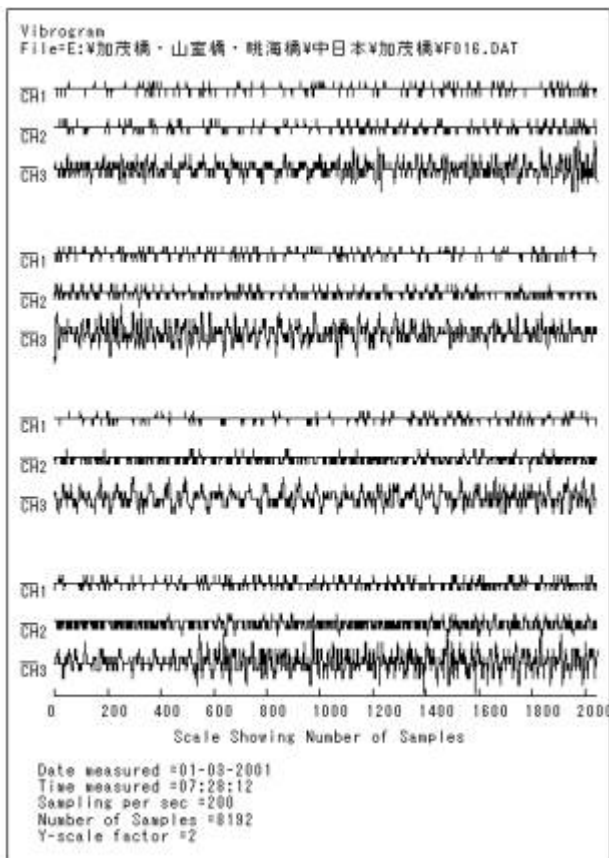


図 1. 振動波形のグラフ化の例(バイブログラム)

図 2. ランニングスペクトル(図1のデータから求めた)

1.2 オッシログラムのデジタル化

構造物の振動は、ランダムな性質、言わば、気まぐれな面があります。振動の強さが時間的に変化しますし、幾つか予想される固有振動も、出たり出なったりします。したがって、科学的な解析作業には不都合なことが多く、従来の考え方は、美しいデータが得られるような工夫をしました。しかし、統計的な解析方法を応用するときは、ランダムであることが、良い解析材料になります。この場合、振動の全体像を視覚的に観察できるオッシログラムが役に立ちます。測定作業の全体は、コンピュータの利用による情報技術(IT)化を指向するようになりました。オッシログラムの画像スタイルにも種々の工夫ができるようになりました。波形をグラフ化するとき、縦横の寸法比の違いなどで、図から受ける印象が変わります。見易いグラフに整形することも重要です。図1は、以前ならば、長いロール状のグラフで得る3成分の加速度振動記録を、縦長のA4版用紙幅に収めるように、折り返して作図させたものです。筆者はこれを**バイブログラム** (Vibrogram) と呼ぶことにしました。図1は、デジタル化のときの精度が低いデータでしたので、ゴミのような波高並びに見えます。後の第4章で説明するスペクトル解析をすると、明瞭な卓越振動のあることが分かります。図2は、その解析例です。

1.3 離散数学を応用する

代数学は、「数の代わり」に文字や記号を使って数の性質や関係を研究する学問です。何かの事象を研究するとき、最初に物理モデルを考え、その説明に数学モデルを立て、それから具体的な数値を代入する計算法を工夫します。代数学では、切れ目のない連続事象を関数としますが、実践的には、飛び飛びの数値並びの級数を処理の対象にします。つまり、離散化した数値並びで、代数学と同じような処理をさせます。離散値を扱う数学を**離散数学 discrete mathematics**)と言います。理論的な連続関数の数学モデルをパソコンで数値計算をさせるために研究されるようになりました。例えば、微分と積分は、**差分と和分**に代えて数値計算をします。統計学的な数値処理は、最初から級数を扱います。**表計算ソフト (spreadsheet) のエクセル (MS-EXCEL)**には、通常の基本代数関数に加えて、多くの**統計関数**が利用できることに注目しておきます。また、特別に数値計算のプログラム(ソフトウェア)を開発しなくても、エクセルで、そこそこの数値計算ができます。また、グラフに作図させる機能もあります。しかし、処理の進め方、つまりユーザインタフェースが煩雑になる欠点もありますので、振動解析に特化した、時系列解析のプログラミングが望ましいのです。

1.4 数値の精度

振動データは、加速度計などの検出器(**センサ**)側で微弱な電圧信号で出力されます。これは**アナログ**信号ですので、増幅器(アンプ)で任意のレベルに変換します。指針の振れ幅で信号の大きさを確認するメータ形式の装置は、磁界に置かれた可動コイルに電流を流すことで針を動かします。微弱な電流であっても、それなりの電気エネルギー(パワー)を必要とします。アナログ (**Analog**) 信号をデジタル (**Digital**) 化して記録する**AD変換器**を使うと、大きなパワーを必要としない、電池でも駆動できる低電力のアンプを設計することができます。ビット並びの数値は、普通、2バイト長(16ビット)の整数型に変換します。実質的に4桁までの有効数字の整数です。これに合わせるようにセンサの感度と測定精度を設定します。加速度 1 G(±980 ガル)の測定ができる加速度計(センサ)で、整数として、同じく±980の範囲でデジタル化する設定にすれば、30 Gまでのデジタル記録は、直線的な感度特性が保証できます。しかし、10ガル程度以下の微弱な加速度レベルの測定をすると、有効数字は1桁しか得られませんので、ゴミ同然の雑音信号しか得られません。したがって、測定したい対象に合わせて、有効数字が3桁程度で得られるように、センサと測定器側のアンプの感度を選択します。これは、測定作業のヒューマンインタフェースの課題です。

1.5 データ保存のファイル仕様

時系列のデータを整数値にして**ファイル**に保存するときは、パソコンでの扱いが不便にならないように、幾つかの標準化を考えます。基本的には、**テキスト**形式の管理データと、**バイナリー**形式の数値並びとの、二種類です。問題になるのは、時系列のデータです。測定器側で出力されデータファイルは、その論理的な構造が分からないと何もできません。ただし、バイナリー形式のデータ構造の利点は、ファイル寸法が小さくて済み、データを通信回線で送信するときにも大きな負荷にならないことです。一般ユーザが扱いやすいファイルは、**テキスト**形式(*.txt)に変換します。ファイルの**識別子**を別に約束してあっても、単純な**テキストエディタ**(メモ帳; Notepad)で中身を読むことができます。バイナリー形式のデータを**エクセルのCSV形式**のファイルに変換してあると、データの論理的な構造がテキスト形式になっています。測定器のメーカー側では、CSV形式のファイルに変換するユーティリティプログラムをサービスしています。時系列データとしての加速度記録を読み込んで、データ解析をするには、やや専門的になりますが、数値計算のできるプログラミング言語(例えば**VB6**)を使ってソフトウェアを開発します。ファイルからテキスト形式でデータを読み込むときは、テキスト一行の先頭に、あらかじめ定義した**キーワード**を書き込んでおいて、それに続けて、説明データを並べる構造にします。時系列データをバイナリー形式のまま利用するときは、テキスト形式でまとめた管理データを、別ファイルにします。解析作業は、最初に管理データのファイルを先に読んでから、バイナリーファイルのデータを取り込みます。

1.6 レコード個数の増加を制限する

振動解析に使う加速度データをファイルから読み出すとき、重要な事柄は、サンプリング周波数とデータ並びの個数です。例えば、サンプリング周波数を 200 Hz に設定すると、8K (8192) 個のデータ並びは約 40 秒間の長さであって、16K バイトのメモリ寸法になります。左右・前後・上下の3成分の加速度を同時記録し、秒数記録用に予備1成分を当てると、バイナリー形式のファイル寸法は 64K バイトになります。時間的に連続して記録を採るときは、複数のファイル集合に構成します。エクセルでデータを管理すると、複数のファイルに跨る連続レコードの継ぎ貼りが便利にできます。この作業ができることを含みにして、一つのエクセルファイルで扱うレコード行数の上限を 16K 程度に抑えます。因みに、旧版のエクセルでは、行数の最大値に 64K の上限がありました。また旧版のメモ帳でも、処理できる文字数に、最大 32K バイトの上限がありました。

2. プログラミングツール

2.1 Visual Basic 6.0 での開発と実行

1980年代、16ビットのミニプロセッサで機能するPC-9800シリーズに代表されるパソコンが普及した、その理由の一つは、使い易いプログラミング言語の BASIC が組み込まれていたことでした。一寸した処理ならば、大型のコンピュータシステムのプログラミング言語(FORTRAN や COBOL)を使うまでもなく、パソコンで処理ができました。グラフィックス処理は、パソコンを利用する方が便利でした。パソコンのOS(オペレーティングシステム)がDOSからWindows系に変わったこと、とりわけ、1995年、Windows 95の発表以降、BASIC言語も改定され、Visual Basic が発表されました。これに合わせるように、ユーザ側では、従来のBASICのソフトを全面的に書き直す必要に迫られました。Visual Basic 6.0 (VB6) は、1998年に発表されました。成熟したプログラミング言語として、独立ソフトとして発売されました。その後、Windowsのバージョン改定の度にVisual Basicのバージョンも改定されてきましたが、単独のソフトとしては発売されなくなりました。一般ユーザは、バージョン改定の度にソースプログラムを書き換える手間をあきらめざるを得ませんでした。VB6では多くの一般ユーザがいましたので、実行形式にコンパイルしたVB6のソフトは、改版されたWindowsシステムでも実行させたい希望があります。それに対応させるように、ランタイムソフトウェアの組み込みが必要になっています。

2.2 グラフィックス処理

グラフィックス処理は、大別して、イラストと総称する図の作成を目的とする場合と、逆に、デジタル写真を代表として、作成済みの画像データの修正をする場合があります。後者は、デジタルカメラが普及するようになって、ソフトの開発が進みました。作図の方法は、原理的に、さらに二種に区別します。ペンを使って線図で描く場合 (line drawing) と、色違いのクレヨンを使って塗り絵のように或る領域を塗り潰す方法 (painting) とです。塗り潰しの場合も、領域を定義する枠を描かせる機能も必要です。アートの作図ではなく、実用に使うイラストでは、図と共に説明用の文字も書ける必要があります。文字も図形ですので、文字の表示方法にも二種類あります。時系列に関するオッシュログラムなどは、線図で描きます。測定作業中の事象を刻々モニタに作図させる使い方もあります。これは、一過性の画像ですので、ソフトコピーの言い方があります。測定済みデータの管理用として用紙に印刷して残したい要望もあります。こちらはハードコピーと言います。

2.3 解像度を理解しておく

パソコンのモニタを作図画面として利用し、必要に応じてプリンタにも描き出したいとする要望は、パソコンの発売以来ずっと続いています。モニタは、原理的にドット並びで文字も表示します。文字として読める最小のドット並びは、画数の少ない英字では、縦・横 16×8 ドットです。初期のモニタは、モノクロ画面で、解像度 (resolution) も高くありませんでした。高解像度 (640×480 ピクセル) を謳ったカラーモニタが利用できるようになって一つの時代が始まりました。ピクセルは、ドットと同等です。この高解像度の仕様は、一行の横幅に英字80文字を並べることができます。しかし、画数の多い漢字を表示するときは、最低でも16×16ドットが必要です。印刷物にしたとき、眼で見て読める最小の字形寸法は、英字ならば4ポイント (約 2 mm) の字高です。これに16ドットを当てると、プリンタの方の解像度は、最小、インチ換算で約 300 DPI (dot per inch) が必要です。線図も同じプリンタと使うときは、1 mm 幅に12本の細線が描き分けられる解像度が要望されます。これも同じ300 DPIです。普段使うレーザプリンタは、標準として、その倍の600 DPIに設定されています。文字種(フォント)の寸法を言うとき、ポイント単位を使うようになりました。その単位は、1インチ当たり72ドットです。モニタの画面寸法は製品によって何種類もありますが、標準的には横位置に置いたA4版の大きさであって、横幅が30 cmです。見かけの解像度で言うと、50 DPIしかありません。因みに、デジタルカメラで撮影した画像を解像度640×480ピクセルのモニタ全画面に表示するときは、まずまずの精細度で鑑賞することができます。大量の画像を管理するとき、このピクセル数を標準的なファイル画像寸法に使うようになりました。

2.4 モニタ用とプリンタ用のデータ

モニタとプリンタとは、パソコンから見れば、別々の外部装置(デバイス)です。両方で、ほぼ同等の出力をさせたいとしても、同じデータを使うことができないことがあります。とりわけ、文字の場合には、別々の字形データが必要です。そのため、モニタの画像がプリンタでの印刷スタイルとは異なることが起きます。見てくれのよい文字スタイルと画像の印刷は、レーザプリンタが利用できるようになってからです。モニタ上の画像は、印刷したとき、どのような画像スタイルになるかの、確認を目的にすることで妥協しています。デバイスが変る度にデバイスに合わせてプログラム本体の変更がないようにするため、プログラムでの画像データと文字データとをデバイスに送るとき、途中にデバイスドライバを介することで対応させるようになりました。

3. 時系列データの統計処理

3.1 解析用に取り出す標本数

振動の測定で得られる時系列データは、幾つかのファイルに跨った多量の数値並びです。その並びから、或る標本数を一単位にして数値解析の対象にします。このデータは、プログラミングの中では配列に収めます。配列のアドレスに2バイトの整数型を使うことが多いことを考えて、データ配列の寸法は、できれば、2のべき乗、1024 … 16384 の範囲で選びます。振動測定の場合には、サンプリング周波数と、何秒間のデータを対象とするかを考えて標本数を決めます。**自己相関関数** (autocorrelation function) は、連続した一つの事象から、或る長さの標本を二組切り出して**相関値** (correlation) の計算をします。二組の標本間の**ラグ**(位置の差)を媒介変数として相関値を計算したものが、自己相関関数です。単発的な固定長のデータ並びを使うときは、半分長さの標本数を切り出して、相関値を計算させます。自己相関関数は、級数の形で求めますが、便宜的に関数の用語を使います。次節で説明する**高速フーリエ変換** (FFT: Fast Fourier Transformation) から**パワースペクトル**を計算する場合も、周波数きざみの座標は、1/2 の配列寸法になります。

3.2 統計量と標準化

振動データの性質を判断するとき、波形の特徴が良く分かるようなグラフに描いて観察に使います。元のデータは物理的単位を持った数値並びですが、グラフに描かせるとき、適度な波高で表示するように、元の事象データを、グラフィックス座標値に直すように標準化します。このとき、元のデータから、統計量として、平均値、最大値、最小値などを求めておき、参考数値としても利用します。元のデータをエクセルのCSV形式で保存してあると、エクセルの組み込み関数を利用して計算ができますし、グラフの作図もできます。自己相関関数や、フーリエ変換の計算も、できなくはないのですが、処理作業は効率的ではありません。

3.3 測定装置側で起こるトレンドなどの補正

加速度の振動記録は、静止状態を0として、正負に振れる数値並びで得られます。一方、風速の測定を考えると、正の数値だけしか扱いません。風速の変動のことを**風の息**と言います。この変動の解析では、或る注目時間区間のデータから、この区間での平均風速を引いた、正負の変動値を扱います。注目区間が変わると、平均値も変わります。これが**移動平均**です。加速度は、常識的には平均値が常に0になるはずですが、しかし、測定器側の設定で、何がしかの**バイアス**値(偏差)を持つことがあります。また、気温の影響を受けて、時間的に平均値がズレて行く**トレンド**を起こす例もあります。つまり、平均値の移動です。そこで、解析に使う標本数単位で、このズレを補正する処理が必要です。対象物に衝撃的な加振を加えて、その加速度記録から速度、さらには変位が求められるのが力学上の理屈です。**FWD**試験 (Falling Weight Deflectometer) がそれを応用した道路舗装検査のシステムであって、専用の測定車があります。それほど大掛かりではなく、「小型で持ち運びが簡単な重錘落下装置を使う・ハンマーで叩く・人がジャンプして着地する」などの場面で応用が提案できます。衝撃試験は短時間、数秒程度で済みます。加速度記録を積分すれば、速度、さらには変位が求まることは力学の理屈です。離散化した数値並びの加速度データから、**数値積分**で速度、さらには変位を求めることが実践的です。この数値積分のとき、元の数値並びに、僅かなバイアスやトレンドがあると、計算結果に影響します。この原因は、数学的に言うと、加速度から変位を求める際に二回の不定積分があるためです。二つの定数項の値を一意に決められないからです。この解決方法を次節で説明します。

3.4 単純梁の曲げモーメント計算でモデル化する

衝撃的な加振による振動は、静止状態が最初にあって、減衰振動を経て、再び静止状態に戻る事象です。この事象は、加速度・速度・変位ともに、データ数値は0で始まり、或る経過時間の後、0に収束します。変位が残るのは、部分的に破壊が起きたときですので、ここでの解析では考えません。この条件を表す仮想の物理モデルに、構造力学で扱う**単純梁**を考えます。標本数がN個であるとして、(N+1)長さの支間を考えます。等間隔の中間格点に番号1~Nの番号を付け、その格点に加速度値を集中荷重とみなして作用させます。格点番号0と(N+1)は支点です。この荷重による梁の曲げモーメントの計算をすれば、支点での曲げモーメント、つまり変位を0にする条件が満たされます。課題は剪断力の扱いです。剪断力は、荷重の積分であって、速度のモデルです。これも両支点で0の条件を満たす必要があります。数値計算では、単純に、格点座標0から関数値を累積していく処理をすることが一回の積分です。格点(N+1)で積分値が残れば、これが直線的なトレンド分ですので、この直線分を元の数値並びから引く補正をします。測定器側では、加速度記録がアナログ量として得られていますので、これを電気電子的に増幅し、電子的な積分回路を通す方法も考えられます。しかし、この電子回路の動作は非常に神経質ですので実用には向きません。

4. スペクトル解析

4.1 代数学で扱うスペクトル

スペクトルの用語は、波長別に光の強さ分布を表した図を言うのが原義です。一般的に波動の集合とみなされる事象で、振動数別の強さ分布を表す場合にも使うようになりました。この解析では、或る連続した時間区間 T を取り出し、その区間を、振動数の異なる三角関数の集合(三角級数)で表すとして、その級数の係数を求めます。これがフーリエ係数です。元の事象の代数的な式を下のように表します：

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad \dots\dots \text{式(1)}$$

右辺の三角関数は、この区間 T で互いに直交する関数です。その性質を利用して (a_n, b_n) を求めます。上の式(1)は、 \cos と \sin の対で表した式ですが、振幅 C と位相角 ω を係数とする形で表すこともします。

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \left(\frac{2\pi n t}{T} + \omega_n \right) \right) \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots \text{式(2)}$$

式(2)の級数 C_n を、周波数を横軸にして描いたグラフに表したものをフーリエスペクトルと言います。この値はフーリエ係数の自乗和を計算し、さらに平方根の計算をしています。自乗のままグラフに描いたものをパワースペクトルと言います。元の関数が、力学的に速度の変化を表している、パワースペクトルは運動のエネルギーの周波数別強さ分布を表します。こちらはエネルギースペクトルと言います。パワースペクトルのグラフは、周波数別にエネルギーの確率分布を表しています。

4.2 パルスと白色雑音

振動事象は、種々の周波数成分が含まれていると、見かけが乱雑な波形になります。スペクトル解析をすると、或る特定の周波数の強さが大きいことを発見することができます。工学的には、卓越振動または固有振動と言います。特に目立つ固有振動がなく、フーリエ係数 C_n がほぼ一定値に計算されるランダムな事象を、理論上、白色雑音 (white noise) と言います。振動のランダム性は、式(2) の ω のランダム性で起こります。構造物に振動を起こさせる外力に、癖のない白色雑音の性質があると、構造物の応答振動は、固有振動数の箇所所で共振を起こさせることができます。一方、衝撃的な加振は、図形的にはパルスです。こちらの場合もフーリエ係数 C_n がほぼ一定値になります。ただし、パルスの位置で、すべての周波数成分の位相角が揃います。振動測定の際の計画をするとき、ランダムに自動車が行き交う環境で測定作業をするか、衝撃的な加振方法を使うかは、そのどちらも、実践的に良い方法になります。

4.3 数値計算には離散値の並びを使う

具体的な数値でスペクトル解析をするには、連続関数に代えて、或る個数の標本並びを使います。それに合わせて、式(1)の三角関数も離散化した数値並びで扱います。パソコンが使えなかった時代は、この数値並びを準備するには数表のお世話になりました。パソコンが利用できるようになって、組み込み関数として単に参照できますし、関数電卓も使えます。しかし、内部的には高度の数値計算技法を使いますので、プログラムの実行時間が長くなります。スペクトル計算では、何万回もの参照をします。全体の演算時間が長くなるのが大きな問題になります。それを解決するために考えられた方法が FFT です。

4.4 高速フーリエ変換の原理

単位円を一周する位置で、 \cos \sin の値を使うことを考えます。全円周を N 等分した座標値の並びが、離散化した三角関数の値です。この座標値は、絶対値が同じになる箇所が何組あります。図3.の16等分の円を例とすると、絶対値が同じになる8個単位の座標が3組あることが分かります。円周の分割数 N を2のべき乗にすれば、三角関数単独の計算回数を少なくすることができます。具体的に数値計算をさせるときは、標本の級数列の並べ替えをします。このアルゴリズムに特徴があることがFFTを有名にした理由です。

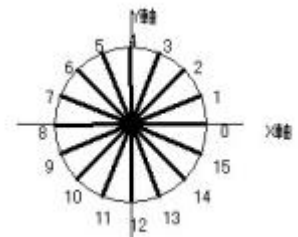


図3. 円を2^M等分する

5. 回帰性の計算に使うモデル

5.1 統計解析の用語

時系列に周期的な性質があることを、統計解析の用語では**回帰性** (regression) があると言います。一般的には、物理的または数学的なモデルがない、統計学的に見てランダムな事象を言います。その平均的な性質が分かるような直線を**回帰直線** (regression line) と言います。前章までの時系列の説明では、横軸に経過時間を考えて、一定の時間間隔を考えました。これは、回帰直線を横軸に平行に考えていて、その座標位置が平均値です。二つの数値並び $X(t)$ $Y(t)$ との対で扱う事象があるとき、これを平面座標の点として表すとします。平均的な性質を、近似的に、直線式 ($Y = AX+B$) として求めたものが回帰直線です。回帰直線からのランダムなズレの性質を調べるのが**統計解析**です。二組の事象 $X(t)$ $Y(t)$ が、どれだけ似ているかの比較に**相関値** (correlation) を計算します。 X と Y が全く同じであれば +1 とします。符号が反対で、 $Y = -X$ の性質があるときが -1 です。相関値が 0 であるときは、二つの事象間に**直交**する (orthogonal) 性質がある、と言います。前章のフーリエ解析は、三角関数列相互の直交性を応用した処理です。ランダムな事象の発現を説明する物理モデルまたは数学モデルが良く分からない時系列を、**確率過程** (random process または stochastic process)、と言います。大地震が起こる確率を言うときは、地震の大きさと、単発的に起こる事象間の周期との対がデータです。世俗的には、株価の変動を分析するなどにも応用されています。観察している事象自体に周期性を発現する性質があるとき、**自己回帰** (auto-regressive) があると言い、その発現の数学的、抽象的なモデルを**自己回帰モデル**(autoregressive model): 詰めて **ARモデル**と言います。

5.2 周期性と回帰性

振動現象に周期性があると判断するときは、物理的な振動モデルがあると仮定できる場合です。しかし、実際の振動現象は気まぐれな性質があつて、固有振動が出たり・出なかったりします。こちらの方にも別種の周期性であると仮定して、これを**回帰性**と区別します。振動の周波数解析に使うデータは、或る注目時刻を起点とした時間区間を考え、或る個数の標本並び取り出します。注目区間が変れば、データの性質が全く変わることが起きます。フーリエ解析に使う数学モデルは、取り出した標本数の数値並びが、その区間の前後に循環的に連続していると仮定しています。そうであると、注目区間をずらしてサンプリングした数値並びでも、同じ解析結果になります。実際現象はそうなりませんので、或る長いデータ並びの全体を大まかに観察できる方法を工夫しなければなりません。この報文の始めに例示した図 1.は、一つのファイル単位に記録された全データをオシログラムに描いたもので、40秒長さの数値並びです。グラフの横幅が約 10 秒です。図 2.は、この並びから、注目点をずらしながら 20 秒間の標本を切り出してスペクトル解析をしたグラフを、縦に並べたものです。卓越振動が、出たり出なかったりすることが観察できます。これを回帰性の解析の対象にします。なお、図 1.と図 2.とは、測定データの管理用に作成しておいて、不要なデータファイルを削除するときの判断にも使います。

5.3 再現周期、再現確率、自己相関関数

例えば、地震現象を解析するとき、短時間の地盤振動波形の性質を調べる周期性の研究のほか、地震が年単位で何回起きたかの回帰性も話題にします。この判断に使うデータは、地震の強さをパラメータ(横軸)として、その回数を縦軸の座標値にしたグラフに整形します。全体の地震回数を底とした%表示に直すと、その強さ以上の地震が年に何回起きたかの確率分布のグラフになります。これを**再現確率**と言います。再現確率の逆数は、この強さ以上の地震が、何年周期で観察されるかを求めることになります。これを**再現周期** (return period) と言います。地震以外の外的な加振でも地盤は振動しますが、こちらの再現周期は、年単位のような長周期ではなく、社会活動の単位である一日や一時間などの単位で振動強さの増減が観察されます。振動現象の時系列の解析では、衝撃試験時のリバウンドなどに見られます。川を挟んだ谷状の地形では、音が反射して繰り返す「こだま」つまりエコーを経験することがあります。航空機の運行管理に利用する**レーダ**も、電波が対象物で反射して返ってくるエコー現象を積極的に利用する装置です。発射した電波と受信した電波とに、同じ波形が或る時間差で観察されますので、この再現周期から対象物までの距離測定に利用します。これらの事象の解析には、自己相関関数を求め、それから周期性と**減衰係数**を求めます。相関値は、二組の標本値の並びから、積の和で計算します。これを**畳み込み積分** (convolution integral) と言います。前章で解説したフーリエ係数は、三角関数との相関値を計算しますので、畳み込み積分をしています。このように、回帰性の計算では、かなりの計算量を必要としますので、サンプル数を増やさない範囲で計算を組み込むことにします。個別の相関値の集合を関数列にまとめたものが、自己相関関数です。さらにスペクトルも、周波数別の強さの集合を関数扱いにしたものです。

6. 数値計算で留意すること

6.1 センサの振動モデル

加速度センサそのものは、外部からの振動を受けて応答振動をする装置です。これ自身も1質点の力学系ですので、一つの固有振動数があります。その振動数のところで感度が最大になり、それ以上とそれ以下の振動数の応答が下がります。そのため、粘性を持ったダッシュポットの作用をする材料を組み合わせることで減衰振動の性質を持たせ、センサの固有振動数までが、実用的に一定の感度が得られるように製作しています。構造物の振動を測るセンサは、固有振動数にして最大で2K Hz 程度以下で使います。振動は、電氣的にはアナログ信号です。これをレコーダに記録するときは、デジタルデータとして保存するようになりました。そのサンプル数は、1秒間に200、または1000にしています。このサンプル数は、対象物の振動数範囲にして、半分の100 Hz、または500 Hz までの計測を考えています。100 Hz 以下の振動数は、大型の構造物の振動で普通に観察されます。100 Hz の振動音は、電気製品に耳を当てるとブーンと言うハム音(50Hz 電源周波数地域)で実感できます。楽器の音程では、基本オクターブ範囲の「ド」から約1オクターブ下の「ラ」の音です。機械製品などの測定では、500 Hz までの振動数を考えます。こちらは、かなり高い音程です。なお、グランドピアノの鍵盤では、最低音が約 28 Hz、最高音が約 4.2K Hz です。

6.2 センサの感度特性を理解しておく

振動測定とその記録器は、音のレベルまでを考えると、マイクロフォンのように、加速度計原理のセンサが普通です。マイクロフォンは、縦波としての音を検出する装置ですので、周波数感度に数 K Hz までを考えています。構造物の振動範囲である100Hz以下の測定には向きません。加速度計は、持ち運びを考えますし、衝撃を加える振動試験にも使います。乱暴な取り扱いにも安全な最大感度レベルは5G 程度です。そうすると、実用的な2バイト整数で出力を得たいとき、感度の不足が起こります(第1.4節参照)。構造物の加速度振動を計測するときは、できれば1G程度を最大測定感度とするのが望ましいのです。地震計は、据え置き型で設計しますので、繊細な感度を持たせています。抵抗線ひずみ計の原理を使う加速度計は、振動数0まで測定できる特徴があります。加速度計を縦横に変えると、重力の加速度を測定できます。この操作をすると、加速度計の感度を検定することができます。加速度計を傾けると、垂直方向の重力加速度成分も検出して平均値がズレることが起きます。これは数値計算の段階で修正することができます。

6.3 測定器側でハイカットフィルタを通す

加速度計は、周波数の高い方に感度が高くなる性質があります。振動のアナログデータをデジタル化するときのサンプリング周波数をF Hz に設定するとき、 $(F/2)$ Hz をナイキスト周波数 (nyquist) と言い、周波数解析での数値計算で扱う最大周波数です。サンプリング周期の逆数は、解析で扱う最低の周波数であって、同時にスペクトル解析の周波数刻みの座標単位です。ナイキスト周波数を越える振動成分が元のアナログデータに含まれていると、データのデジタル化のとき、折り返して雑音データになります。これをエイリアシング (aliasing) と言います。この周波数以上のアナログ信号の成分を含まないように、測定器側でハイカットフィルタの電子回路を通して、高い周波数成分を除く必要があります。

6.4 数値積分でバンドパスフィルタの実現させる

物を伝わる縦波は音の性質を持ちます。加速度計は、振動数の高い方に感度が上がるセンサです。構造物の振動は、力学的には速度応答の振動エネルギーをスペクトル解析に使うべきですので、加速度応答をそのままスペクトル計算に使うと、高い振動数の現象を強調します。それを解決する方法として、加速度のデータ並びを数値積分して速度データに直す方法があります。

6.5 フーリエ解析とフーリエ合成を使う

加速度測定で得られた数値並びをそのまま FFT でフーリエ解析をするとき、或る周波数範囲以外のフーリエ係数を0にして、逆フーリエ変換で波形を合成する計算すれば、元の波形にバンドパスフィルタを通す処理を実現させることとなります。このとき、パワースペクトルの計算もできますので、周波数に対応した座標箇所、速度データから波数の自乗をした値でパワースペクトルの数値を除すと、そのまま力学系としてのエネルギースペクトル分布になります。

7. パソコンの作業環境

パソコンの OS が Windows 系に変わったことで、プログラムの実行を対話的 (interactive) に制御できるようになりました。その方法は、主に、ウインドウ画面 (正式にはフォームと言います) のタイトルバーの下にツールバーを表示させておいて、そのプルダウンメニューをマウスで選択します。どのメニューをどの順で選択すれば、何をするか説明がないと、何も作業ができません。それを説明する方法に種々の工夫が必要です。一般的な方法は、HELP と表示したメニューを選択させます。筆者は、下の箇条書きで説明する方法を採用しています。次ページの図4と図5とを参照して下さい。

- (1) 作業用のウインドウ画面は、一つの親ウインドウの中に、三つの子ウインドウを並べます。その三つとは、処理の説明を表示するコンソールウインドウ、グラフィックを表示するグラフィックスウインドウ、処理の結果を文字で書き出して表示するテキストウインドウです。このデザインが MDI 方式です。
- (2) メニューバーは、親ウインドウに表示されます。クリックしてアクティブにした子ウインドウによって変わります。最も基本となるメニューは、コンソールウインドウをアクティブにしたとき、左端にある【SELECT】です。この子メニューの【NEXT >>>】を選ぶと、プログラムの実行が次のステップに移ります。コンソールウインドウには、選択できる処理の説明がテキスト形式でリストされます。これが対話的な HELP です。
- (3) プログラムの実行時には、テキストウインドウに文字形式で処理結果のリストが出力され、グラフィックスウインドウにグラフが描かれます。テキストウインドウは、テキストエディタの機能があります。これらの子ウインドウをクリックすると、どちらも、ウインドウに表示してある結果をプリンタに書き出すか、ファイルに保存するかの選択ができるメニューバーが表示されます。
- (4) 子ウインドウの標準的な表示方法は、親ウインドウの左上にコンソールウインドウ、その下にテキストウインドウ、右に縦長で画像ウインドウを配置します。子ウインドウは位置と寸法とをマウスで個別に制御できます。
- (5) デスクトップ全体を画像データとして保存したいときは、パソコンのキーボード左下「Fn」キーと右上のプリントスクリーンキー「PrtScr」を押して、クリックボードに画像を保存します。別の画像ソフトで結果を取り込みます。グラフィックスデータの編集は Microsoft Photo Editor が簡便です。このツールは、Office2000 のユーティリティに入っています。Windows のバージョン違いで、ユーティリティとして使うグラフィックスソフトは改訂されています。次ページに表示した図4と図5とは、この方法で求めたものです。
- (6) 計算処理に時間が掛かる場合には、マウスのアイコンを砂時計にします。子ウインドウに結果を表示させるとき、処理に時間がかかりますが、子ウインドウのタイトルバーの最小化ボタンをクリックして表示させないようにすると、プログラムの実行を早くできます。
- (7) プログラムを終了させるときは、親ウインドウ、子ウインドウ、どれも、右上の閉じるマーク「×」をマウスでクリックします。親ウインドウのタイトルバーの左上隅にあるアイコンをクリックしても閉じるメニューが現れますので、これらのどれかを選択して終了させることができます。閉じるマークをうっかり指示して、不本意に終了することを防ぐため、メッセージボックスを表示して確認するようにしてあります。ハングアップしたときには、強制終了をさせる(Ctrl+Alt+Del キー)を使います。

図4.と図5 の解説

次ページの二つの図は、衝撃加振の振動記録を解析するプログラムの、実行時に表示されたモニタ全体の画像です。モニタに表示された親ウインドウの中に三つの子ウインドウを配置させています。左の二つの子ウインドウはテキストがリストされています。右がグラフィックスウインドウです。ここでは、簡易な FWD 試験に使うようにした小型の重錘落下装置を使って、建物のコンクリート床の衝撃試験をした場合の例を示しました。図4は、振動データ(時系列)の生データ全体を読み込んだときの画像です。全体 16 秒の波形を示すバイプログラムとランニングスペクトルを表示しています。右側のグラフィックスウインドウでは、錘が何回かリバウンドした波形が分かります。減衰振動が時間差をおいて何回か観察されます。これが、再現周期の性質を表しています。

図5は、全体の時系列の集合から、減衰振動を最もよく含むようにした、長さ2秒のデータを切り出して、自己相関関数とスペクトル解析をした結果を示したものです。三つの明瞭な卓越振動が観察できます。最左端の鋭いピークは錘のリバウンドの周期に関係しています。25 Hz 付近のピークが床の曲げ振動です。高い方の振動周期は、床を伝わる縦波(音)の成分です。なお、留意することは、振動のエネルギーは、加速度ではなく、速度の方でパワースペクトルを評価しなければなりません。したがって、高い振動数のピークの方は、あまり重要ではありません。

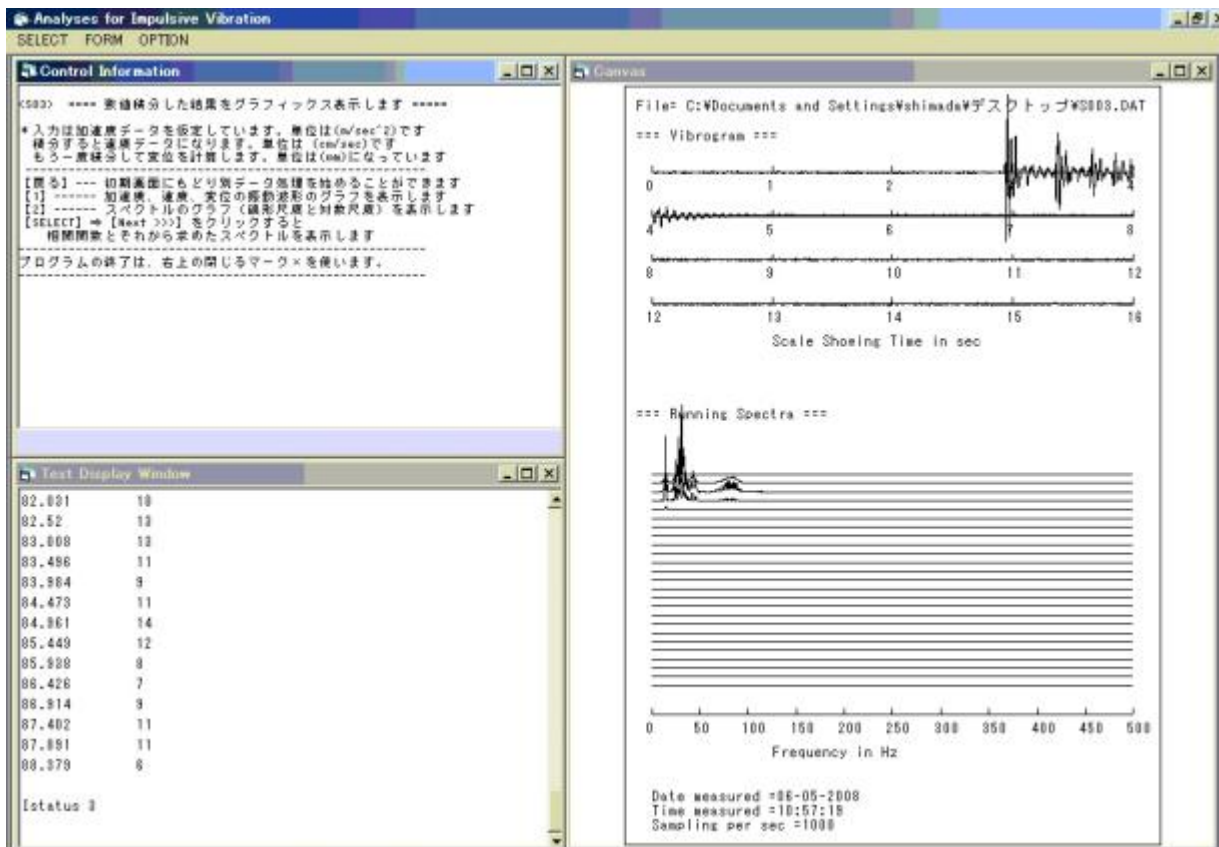


図4. プログラム実行時の画面レイアウトの例。(バイログラムとランニングスペクトル)

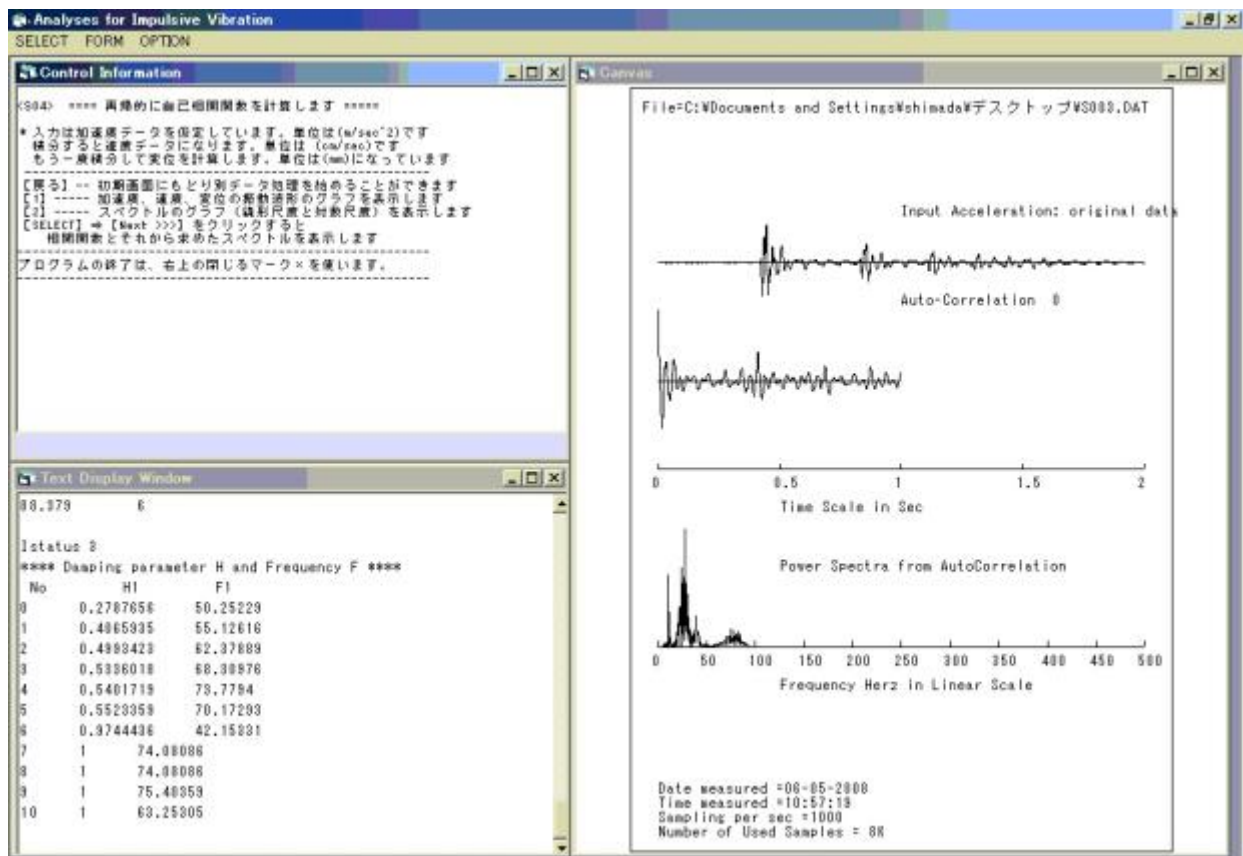


図5. プログラム実行時の画面レイアウトの例。(2秒長さのデータを切り出して解析した例)

… 終わり