

単純梁の曲げモーメントと撓みの計算（デモ版）

単純梁の力学は、構造力学では最も基礎的なものですので種々の公式があります。橋梁工学では、単位荷重が作用するときの、曲げモーメントと撓みの影響線の計算を多く利用します。支間を n 個に等分割した注目点を格点とし、格点間を格間（パネル）と言います。集中荷重を格点だけに作用させ、格点での曲げモーメントと撓みを使う計算は、種々の場面で応用されます。この エクセルSoft は、格子桁の分配係数を計算するための予備計算を目的としてまとめました。格子計算と合わせるとページ数が増えますので、格子計算はこの計算結果の要点だけをコピーして別ソフトとしてまとめます。

影響線の計算は、少なくとも注目点の個数 n の二乗個の数値の組みを計算する必要があります。対称性がある計算ですので、計算量を減らすことも工夫されます。MS-Excelを使うと、表計算の形で機械的に計算をまとめる方法と、組み込みのマトリックス関数が利用できますので、計算手順を分かり易く表すことができるようになりました。マトリックスを積極的に使うとなると、その計算法に合わせるように理論式を整理し直します。その方法は、微分方程式に代えて階差式（差分式）を使います。単純梁の支間 L を等間隔に分割します。格点位置は、実数座標に代えて、整数座標 $0 \sim n$ を使います。

連続する3格点 (i, j, k) での曲げモーメントと荷重との関係は、

$$P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda, \text{ ただし } \lambda \text{ は格間長です。} \quad \dots (1)$$

この式の形は連立方程式の集合を意味しますので、係数の部分 $(-1, 2, -1)$ を取り出して、マトリックスの形 $[T_1]$ で表します。そうすると、 M を P で表す式の形は、このマトリックスの逆マトリックス $[T_2]$ で計算できます。 M の解は、行成分と列成分とがありますが、これが曲げモーメントの影響線とモーメント図の座標値に対応します。 M のマトリックスは対称な正方行列で得られますので、どちら向きに利用しても構いません。

格点での撓みを求める場合も階差式の形を利用します。集中荷重が格点に作用しているときは、曲げモーメントが格点位置で折れ線状になっていますので、隣接する3格点に注目して、両隣の格点を結んだ直線との相対的な撓み ΔY_j を考えます。

$$\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2 \quad \dots (2)$$

式(2)の右辺の係数は、式(1)と同じです。この形は、二階の微分方程式を階差式で表した式の意義を持っています。係数を取り出した逆マトリックスを求めることは、積分を行わせる操作に当たります。この相対的な撓み分を、三連モーメント式で表します。

$$\Delta Y_j = (M_i + 4M_j + M_k) * (\lambda^2 / 3EJ) \quad \dots (3)$$

式(3)の右辺の係数 $(1, 4, 1)$ を取り出して、全体をマトリックスの形 $[T_3]$ で表します。これに掛ける曲げモーメントは、式(1)を解いた M を代入します。形式的には、二つのマトリックスの積を計算して $[T_4] = [T_2] * [T_3]$ で求め、これが相対的な撓み ΔY の解です。変位 Y を計算することは式(2)を解くことです。これは、 $[T_5] = [T_2] * [T_4]$ で求めます。単純梁の撓みの影響線と撓み図の数値は、対称マトリックス $[T_5]$ の行・列どちらの成分を使っても構いません。ただし、パラメータとして定数 $(\lambda^3 / 6EJ) / n$ を乗じます。

単純梁の支間を等分する分割数 n を、10から2までの場合をシートPanel10~Panel02にまとめました。 $n=2$ の場合は、マトリックス計算をするまでもないのですが、参考として付けました。

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 2$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

[T₁]の計算

(-1, 2, -1)の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

$$[T_1] = 2$$

[T₂]の計算

[T₂]は[T₁]の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線／モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

$$[T_2] = 1$$

[T₃]は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。
2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

$$[T_3] = 4$$

[T₄] = [T₂] * [T₃]で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

$$[T_4] = 4$$

[T₅] = [T₂] * [T₄] / nで計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線／撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

$$[T_5] = 2$$

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 3$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

[T₁]の計算

(-1, 2, -1)の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

[T₂]の計算

[T₂]は[T₁]の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線／モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[T₃]は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

[T₄] = [T₂] * [T₃]で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

$$[T_4] = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

[T₅] = [T₂] * [T₄] / nで計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線／撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

$$[T_5] = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 4$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

[T_1]の計算

(-1, 2, -1)の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

[T_2]の計算

[T_2]は[T_1]の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線／モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

[T_3]は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

[T_4] = [T_2] * [T_3]で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

$$[T_4] = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 \\ 12 & 20 & 12 \\ 6 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

[T_5] = [T_2] * [T_4] / nで計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線／撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

$$[T_5] = \begin{bmatrix} 18 & 22 & 14 \\ 22 & 32 & 22 \\ 14 & 22 & 18 \end{bmatrix}$$

単純梁の曲げモーメントと撓み(デモ版)

パネル数

$n = 5$

パネル間隔

$\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

[T₁]の計算

(-1, 2, -1)の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意

連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$

連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

[T₁] =

2	-1	0	0
-1	2	-1	0
0	-1	2	-1
0	0	-1	2

[T₂]の計算

[T₂]は[T₁]の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。

単純梁の曲げモーメント影響線/モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

[T₂] =

4	3	2	1
3	6	4	2
2	4	6	3
1	2	3	4

[T₃]は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

[T₃] =

4	1	0	0
1	4	1	0
0	1	4	1
0	0	1	4

[T₄] = [T₂] * [T₃]で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

[T₄] =

19	18	12	6
18	31	24	12
12	24	31	18
6	12	18	19

[T₅] = [T₂] * [T₄] / nで計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線/撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

[T₅] =

32	45	40	23
45	72	68	40
40	68	72	45
23	40	45	32

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 6$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

[T_1]の計算

(-1, 2, -1)の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

[T_1]=

2	-1	0	0	0
-1	2	-1	0	0
0	-1	2	-1	0
0	0	-1	2	-1
0	0	0	-1	2

[T_2]の計算

[T_2]は[T_1]の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線/モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

[T_2]=

5	4	3	2	1
4	8	6	4	2
3	6	9	6	3
2	4	6	8	4
1	2	3	4	5

[T_3]は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、[T_3] * $\lambda^2 / 12EJ$ です。

[T_3]=

4	1	0	0	0
1	4	1	0	0
0	1	4	1	0
0	0	1	4	1
0	0	0	1	4

[T_4] = [T_2] * [T_3]で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

[T_4]=

24	24	18	12	6
24	42	36	24	12
18	36	48	36	18
12	24	36	42	24
6	12	18	24	24

[T_5] = [T_2] * [T_4] / nで計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線/撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

[T_5]=

50	76	78	62	34
76	128	138	112	62
78	138	162	138	78
62	112	138	128	76
34	62	78	76	50

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 7$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

[T_1]の計算

(-1, 2, -1)の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

[T_1]=

2	-1	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0
0	0	-1	2	-1	0
0	0	0	-1	2	-1
0	0	0	0	-1	2

[T_2]の計算

[T_2]は[T_1]の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線／モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

[T_2]=

6	5	4	3	2	1
5	10	8	6	4	2
4	8	12	9	6	3
3	6	9	12	8	4
2	4	6	8	10	5
1	2	3	4	5	6

[T_3]は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

[T_3]=

4	1	0	0	0	0
1	4	1	0	0	0
0	1	4	1	0	0
0	0	1	4	1	0
0	0	0	1	4	1
0	0	0	0	1	4

[T_4]=[T_2]*[T_3]で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

[T_4]=

29	30	24	18	12	6
30	53	48	36	24	12
24	48	65	54	36	18
18	36	54	65	48	24
12	24	36	48	53	30
6	12	18	24	30	29

[T_5]=[T_2]*[T_4]/nで計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線／撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

[T_5]=

72	115	128	117	88	47
115	200	232	216	164	88
128	232	288	279	216	117
117	216	279	288	232	128
88	164	216	232	200	115
47	88	117	128	115	72

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 8$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

[T₁]の計算

(-1, 2, -1)の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

[T₁]=

2	-1	0	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0	0
0	0	-1	2	-1	0	0
0	0	0	-1	2	-1	0
0	0	0	0	-1	2	-1
0	0	0	0	0	-1	2

[T₂]の計算

[T₂]は[T₁]の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線／モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

[T₂]=

7	6	5	4	3	2	1
6	12	10	8	6	4	2
5	10	15	12	9	6	3
4	8	12	16	12	8	4
3	6	9	12	15	10	5
2	4	6	8	10	12	6
1	2	3	4	5	6	7

[T₃]は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

[T₃]=

4	1	0	0	0	0	0
1	4	1	0	0	0	0
0	1	4	1	0	0	0
0	0	1	4	1	0	0
0	0	0	1	4	1	0
0	0	0	0	1	4	1
0	0	0	0	0	1	4

[T₄]=[T₂]*[T₃]で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

[T₄]=

34	36	30	24	18	12	6
36	64	60	48	36	24	12
30	60	82	72	54	36	18
24	48	72	88	72	48	24
18	36	54	72	82	60	30
12	24	36	48	60	64	36
6	12	18	24	30	36	34

$[T_5] = [T_2] * [T_4] / n$ で計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線／撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

$[T_5] =$

98	162	190	188	162	118	62
162	288	350	352	306	224	118
190	350	450	468	414	306	162
188	352	468	512	468	352	188
162	306	414	468	450	350	190
118	224	306	352	350	288	162
62	118	162	188	190	162	98

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 9$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

$[T_1]$ の計算

$(-1, 2, -1)$ の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

$[T_1] =$

2	-1	0	0	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0	0	0
0	0	-1	2	-1	0	0	0
0	0	0	-1	2	-1	0	0
0	0	0	0	-1	2	-1	0
0	0	0	0	0	-1	2	-1
0	0	0	0	0	0	-1	2

$[T_2]$ の計算

$[T_2]$ は $[T_1]$ の逆マトリックスで求める。整数化するためn倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線／モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

$[T_2] =$

8	7	6	5	4	3	2	1
7	14	12	10	8	6	4	2
6	12	18	15	12	9	6	3
5	10	15	20	16	12	8	4
4	8	12	16	20	15	10	5
3	6	9	12	15	18	12	6
2	4	6	8	10	12	14	7
1	2	3	4	5	6	7	8

$[T_3]$ は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

$[T_3] =$

4	1	0	0	0	0	0	0
1	4	1	0	0	0	0	0
0	1	4	1	0	0	0	0
0	0	1	4	1	0	0	0
0	0	0	1	4	1	0	0
0	0	0	0	1	4	1	0
0	0	0	0	0	1	4	1
0	0	0	0	0	0	1	4

$[T_4] = [T_2] * [T_3]$ で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

$[T_4] =$

39	42	36	30	24	18	12	6
42	75	72	60	48	36	24	12
36	72	99	90	72	54	36	18
30	60	90	111	96	72	48	24
24	48	72	96	111	90	60	30
18	36	54	72	90	99	72	36
12	24	36	48	60	72	75	42
6	12	18	24	30	36	42	39

$[T_5] = [T_2] * [T_4] / n$ で計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線／撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

$[T_5] =$

128	217	264	275	256	213	152	79
217	392	492	520	488	408	292	152
264	492	648	705	672	567	408	213
275	520	705	800	784	672	488	256
256	488	672	784	800	705	520	275
213	408	567	672	705	648	492	264
152	292	408	488	520	492	392	217
79	152	213	256	275	264	217	128

単純梁の曲げモーメントと撓み

パネル数
パネル間隔

$n = 10$
 $\lambda = \text{支間} L / n$ として利用する

$[T_1]$ の計算

$(-1, 2, -1)$ の係数をマトリックスに構成する。(1/2)倍しない係数に注意
連続する3格点の曲げモーメントと荷重との関係式、 $P_j = (-M_i + 2M_j - M_k) / 4\lambda$
連続する3格点で、左右二点に対する相対撓みは、 $\Delta Y_j = (-Y_i + 2Y_j - Y_k) / 2$

$[T_1] =$

2	-1	0	0	0	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0	0	0	0
0	0	-1	2	-1	0	0	0	0
0	0	0	-1	2	-1	0	0	0
0	0	0	0	-1	2	-1	0	0
0	0	0	0	0	-1	2	-1	0
0	0	0	0	0	0	-1	2	-1
0	0	0	0	0	0	0	-1	2

$[T_2]$ の計算

$[T_2]$ は $[T_1]$ の逆マトリックスで求める。整数化するため n 倍する。
単純梁の曲げモーメント影響線/モーメント図は、 $BM = [T_2] * \lambda / n$ で計算する。

$[T_2] =$

9	8	7	6	5	4	3	2	1
8	16	14	12	10	8	6	4	2
7	14	21	18	15	12	9	6	3
6	12	18	24	20	16	12	8	4
5	10	15	20	25	20	15	10	5
4	8	12	16	20	24	18	12	6
3	6	9	12	15	18	21	14	7
2	4	6	8	10	12	14	16	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9

$[T_3]$ は、三連モーメント式の係数列(1, 4, 1)をマトリックスに構成する。

2パネルを取り出して相対撓み ΔY は、 $[T_3] * \lambda^2 / 12EJ$ です。

$[T_3] =$

4	1	0	0	0	0	0	0	0
1	4	1	0	0	0	0	0	0
0	1	4	1	0	0	0	0	0
0	0	1	4	1	0	0	0	0
0	0	0	1	4	1	0	0	0
0	0	0	0	1	4	1	0	0
0	0	0	0	0	1	4	1	0
0	0	0	0	0	0	1	4	1
0	0	0	0	0	0	0	1	4

$[T_4] = [T_2] * [T_3]$ で計算する。

連続する3格点で、中央点の相対撓みは、 $\Delta y = [T_4] * (\lambda^3 / 12EJ) / n$

$[T_4] =$

44	48	42	36	30	24	18	12	6
48	86	84	72	60	48	36	24	12
42	84	116	108	90	72	54	36	18
36	72	108	134	120	96	72	48	24
30	60	90	120	140	120	90	60	30
24	48	72	96	120	134	108	72	36
18	36	54	72	90	108	116	84	42
12	24	36	48	60	72	84	86	48
6	12	18	24	30	36	42	48	44

$[T_5] = [T_2] * [T_4] / n$ で計算する。

単純梁の、単位荷重による撓みの影響線／撓み図は、 $Y_{ij} = [T_5] * (\lambda^3 / 6EJ) / n$

$[T_5] =$

162	280	350	378	370	332	270	190	98
280	512	658	720	710	640	522	368	190
350	658	882	990	990	900	738	522	270
378	720	990	1152	1180	1088	900	640	332
370	710	990	1180	1250	1180	990	710	370
332	640	900	1088	1180	1152	990	720	378
270	522	738	900	990	990	882	658	350
190	368	522	640	710	720	658	512	280
98	190	270	332	370	378	350	280	162