

易しくない 幾何のお話

2021.02

0. まえがき

幾何(きか)は、英語の **geometry** の訳語です。しかし、漢字並びの字面(じづら)で見ると、全く意味の理解ができない、何とも不思議な学術用語です。漢字利用の本場である中国で、数量や程度が「いくらあるか？」と尋ねるときの疑問文に使われる熟語が元ようです。古い時代から使われていましたので、漢和辞典に載っています。和語では(いくばく)と読ませます。文語的な言い方です。漢学の素養があった人には常識であったようですが、現代では使いません。日本語の辞書は「幾何は**数学**の一分野であって、**幾何学**の略」とあります。しかし、何の説明にもなっていません。せめて、「**図形**の研究の総称」とでも加えて欲しいものです。小学生向けの国語辞書にも載っていません。しかし、幾何は、広くまた深い内容があって、多くの学問体系に浸み込んでいます。幾何に関わる話題は、あまりにも種類が多いので、図形を数学的な扱うときだけに限定した場合を幾何学と言うようです。そうすると、日常的な話題が抜けてしまいます。そこで図形に関する雑学的な話題を思いつくままにまとめました。

なお、この文書は、「**易しくない算術のお話**」の姉妹編です。合わせてお読み下さい。また、コンピュータを利用して幾何の話題を解説した文書は「**易しくない計算幾何学**」として別にまとめました。

島田 静雄

目 次

0. まえがき

1. 理解が難しい専門用語

- 1.1 測地・測量・幾何・図学
- 1.2 学を付けた幾何学・数学は硬い言葉である
- 1.3 虚学と実学
- 1.4 科学は過去のデータを分析する方法を取る
- 1.5 モデルとモデリング
- 1.6 技術は三つの要素を考える

2. 度量衡を理解する

- 2.1 長さの単位は身体の寸法を元にした
- 2.2 歩測で測る
- 2.3 メートルは人為的に決めた長さである
- 2.4 地形に作図する実践
- 2.5 容積と体積の単位系
- 2.6 重量単位と質量単位

3. 産業と幾何との関わり

- 3.1 略奪産業が横行していること
- 3.2 人類は厄介な動物であること
- 3.3 大航海時代の幾何
- 3.4 地理と幾何
- 3.5 非ユークリッド幾何学の誕生
- 3.6 第二次産業は市場原理が働く
- 3.7 学芸は第三次産業に入れる
- 3.8 天文・地文・人文
- 3.9 数式が使えない幾何学的量

4. 可視化の話題

- 4.1 可視化は新しい技術用語です
- 4.2 定木とコンパスを使う仮想の作図法
- 4.3 初等幾何学は寸法数字を使わない

5. 曲線を扱う幾何

- 5.1 折れ線図形
- 5.2 右回りと左まわりの螺旋

6. 幾何パズルとトポロジー

- 6.1 二次元図形の並べ替えパズル
- 6.2 サイコロは二種ある
- 6.3 ルービックキューブ
- 6.4 回転はトポロジーの理解が必要

7. 幾何モデリング

- 7.1 世界観を変える変換
- 7.2 工業製図法への応用
- 7.3 計算幾何学で扱うボロノイ図

8. 初等幾何のおさらい

- 8.1 言葉を使う説明が理解させる王道である
- 8.2 円と線分の組み合わせの平面図形を扱う
- 8.3 幾何はコンピュータ処理に向いていないこと
- 8.4 幾何言 GBASIC (Geometry Basic)
- 8.5 幾何モデリング言語 GEOMAP

用語索引

解 説

この用語索引は、この文書の中で、どのような用語が使われているのかを、ざっと見るような使い方を考えました。索引は文書の末尾に付けるのが普通ですが、目次と合わせて文書の始めに置きました。インターネットの利用が普及してきましたので、専門用語であっても、検索すると、かなり詳しい説明を見ることができます。まえがきで触れたように、この文書は、幾何に関して雑学的な話題を集めましたので、全く関係のなさそうな言葉も含まれています。例えば、桃太郎とか弁慶の名前が載っています。前後の文脈との関係で、例として取り上げた語です。

筆者は、一単位の文書のページ数を20ページ前後に抑えることにしています。索引に付けた番号は、ページ番号ではなく、章・節の番号です。目次と索引とは段組みで編集してありますが、本文は一段組みです。同じ文書を WEB 版にして利用するときは、すべて一段組みに戻されることを考えたためです。なお郵送で配布する文書は、A4 版両面刷りで 10 枚以下のコピーで作成します。定型郵便の郵送代を抑えることも考えました。ただし、高級な用紙は重量が 50 グラムを超えることがありますので注意が必要です。

— 英字 —					
BASIC	8.3	一里塚	2.2	幾何学的量	3.9
Borland 社	8.4	飲料水	3.1	幾何言語	8.4
C++6	8.4	陰極線管	4.1	技術	1.2
COBOL	3.9	市場	3.6	技能	1.6
FORTRAN	3.9	田舎間	2.2	技法	1.6
GBASIC	8.4	円	8.2	球面幾何学	3.5
GEOMAP	8.5	演算子記号	3.9	巨木	3.1
Object	1.5	遠近法	4.1	虚学	1.3
S 燃り	5.2	オイラー回転	6.4	京間	2.2
VBA	8.3	オブジェクト指向	1.5	教育学	1.3
Z 燃り	5.2	折れ線図形	5.1	教育産業	3.7
— あ —		— か —		曲線設置法	2.4
アインシュタイン	7.1	カナダ	3.4	曲線定木	5.1
アカデミズム	1.3	ガリレオ	3.8	曲面	3.4
アナログ量	3.9	ガロン缶	2.5	行列	7.1
アフィン幾何学	1.2	隠れ線処理	8.5	木樺	2.5
アマ	1.3	隠れ面処理	8.5	グラフィックス	8.1
アルキメデス		仮想現実	7.1	グラフィックス	
の定理	3.9	可視化	4.1	ウインドウ	8.4
朝顔	5.2	家庭用	2.6	グラム	4.1
いくばく	1.1	絵画	4.1	グリニッジ	3.3
インタフェース	1.6	学芸	3.7	具象	1.5
インチ	2.3	学際	2.4	玄人	1.3
インフラ	3.6	学者バカ	1.3	間	2.1
位相幾何学	8.5	学問	1.2	経線	2.4
位置	4.3	貫	2.6	経度	3.3
緯度	3.3	幾何パズル	6.1	計算幾何学	7.1
一過性	4.1	基線測量	2.4	権威主義	1.3
一町歩	2.2	幾何	0	原寸	7.2
一般相対性理論		幾何モデル	7.1	コンソール	
		幾何学	1.2	ウインドウ	8.4
				コンパス	4.2
				コンピュータグラ	
				フィックス	8.2
				強盗	3.2
				五心	4.2
				公共資本	3.6
				口語読み	1.1
				工業製図	7.2
				航海術	3.4
				合	2.5
				石(こく)	2.5
				— さ —	
				サイコロ	6.2
				座標変換	6.4
				サブウインドウ	
					8.4
				竿秤	2.6
				座標幾何学	1.2
				座標数値	4.3
				座標変換	7.1
				再現性	8.4
				栽培漁業	3.1
				栽培農業	3.1
				栽培林業	3.1
				三角形	4.2
				三角測量	2.4
				三次元曲線	5.2
				三平方の定理	3.9
				算額	3.7
				算術	1.2
				算数	1.2
				算法	1.2
				切(さい)	2.5
				四則演算	3.9
				子午線	3.4
				質量	2.6
				実学	1.3
				実体	3.9
				実用技術	1.1
				実用主義	1.3
				写真測量	2.4
				射影幾何学	1.2
				射影変換	4.1
				捨象	1.5
				尺	2.1
				尺貫法	2.1
				収奪農業	3.1
				宗教	3.2
				集合	3.9
				集合	8.3
				重心定理	4.3
				重量	2.6
				重力加速度	2.6
				順序数	3.9
				初等幾何	1.2
				初等数学	1.2
				所在	3.9
				升(しょう)	2.5
				抄録	1.5
				消点	7.1
				証明	3.9
				量(じょう)	2.2
				植民地	3.3
				職人さん	1.3
				進歩的	1.4
				人工現実	7.1
				人材	1.6
				人文	3.8
				人文地理学	3.8

素人	1.3	体積	2.5		2.4	プロ	1.3	目立ちたがり屋	
定規	4.2	対象物	1.5	ドラム缶	2.5	武装闘争	3.2		3.7
定木	4.2	代数	1.2	トロイの木馬	3.1	複素数	8.3	モデリング	1.5
スイング	6.4	台形	2.4	ドロネー図	7.3	仏教	3.2	モデル	1.5
スタジオ測量	2.4	大円	3.4	トン	2.6	分数	3.9	モンジュ	1.1
図学	1.1	大航海時代	3.3	泥棒	3.2	粉体	2.5	桃太郎	3.2
図形	0	大仏殿	3.1	斗	2.5	文化	1.2	物(もの)	1.5
図形学	8.2	第一次産業	3.1	度量衡	2.1	ヘクタール	2.2	物事	1.5
図面	7.2	第三次産業	3.7	投影法	4.1	ベクトル	7.1	木材	2.5
水準測量	2.4	第二次産業	3.6	統計学	1.4	ベジエ曲線	5.1	目的語	1.5
水理学	3.8	拓殖	3.1	透視図	7.1	変換行列	6.4		
水力学	3.8	知的財産	3.6	頭字語	1.6	平安京	2.4	―― や ――	
水路測量	2.4	地球	1.1	同心円	3.4	平行	3.4	ヤード	2.1
数学	1.2	地球儀	3.4	道具	1.6	平行投影法	7.2	焼畑農業	3.1
数字	3.9	地形	1.1	特許法	3.6	平城京	2.4	ユークリッド	1.1
数式	3.9	地形学	2.4			平面幾何学	3.4	有体物	1.5
寸法数字	4.3	地質学	2.4	―― な ――		平面図形	8.2	有理数	3.9
墨壺	7.2	地政学	2.4	長さ	2.1	変換	7.1	容積	2.5
世界	1.1	地政学	3.8	ニュートン	2.6	弁慶	3.2	溶接	8.5
世界観	3.8	地動説	3.8	二元数	8.3	ボロノイ図	7.3	用水	3.1
政治地理学	3.8	地文	3.8	螺子(ねじ)	5.2	ポンド	2.6		
正投影法	7.2	地理	3.4	ノア方舟	3.1	歩測	2.2	―― ら ――	
正当化	3.2	地理学	2.4	農業土木	3.1	補助線	4.2	螺旋	5.2
製図	7.2	抽象	1.5			母点	7.3	リーマン幾何学	
製図用具	4.2	著作権法	3.6	―― は ――					7.1
石材	2.5	丁	2.1	パース	4.1	―― ま ――		リットル	2.5
切断	8.5	町	2.1	ハード	1.6	マイクロコンピュ		里	2.1
設計図	7.2	鳥観図	4.1	ハードコピー	4.1	ータ	8.3	立体幾何学	1.2
窃盗	1.5	直角三角形	3.9	パソコン	8.3	マイル	2.2	立体視	8.2
節点	5.1	直交座標	5.2	バネ秤	2.6	マイルストーン	2.2	略奪産業	3.1
線形空間	7.1	坪	2.2	バレル	2.5	マクロ	8.3	林業	3.1
線形代数学	7.1	ティルト	6.4	パン	6.4	マトリックス	7.1	ルービック	
線形変換	7.1	データ	1.4	判例	1.4	マリン・クロノ		キューブ	6.3
線分	8.2	デカルト座標	5.2	ビジネスグラフ		メータ	3.3	レバノン杉	3.1
前例	1.4	テキスト			4.1	巻貝	5.2	路線測量	2.4
ソフト	1.6	ウインドウ	8.4	左まわり	5.2	右ネジ	5.2	六分儀	3.3
ソフトコピー	4.1	デジタル	3.9	否定	8.5	右回り	5.2	論証	3.9
測地	1.1	哲学	3.7	非ユークリッド		右手系	5.2	論理演算	8.3
測地学	2.4	天地人	3.8	幾何学	3.4	向き	5.2	論理積	8.5
測量	1.1	天動説	3.8	非線形変換	7.1	無体物	1.5	論理和	8.5
		天文	3.8	微分幾何学	7.1	無理数	3.9		
―― た ――		展開図	8.5	ファイル	8.4	メートル法	2.3	―― わ ――	
多角形	4.2	点	8.3	フィート	2.1	メニューバー	8.4	和算	3.7
多元数	8.4	トポロジー	6.2	プラグマティズム		メルカトル図法			
多面体	8.5	トラバース測量			1.3		3.4		
						明治維新	1.2		

1. 理解が難しい専門用語

1.1 測地・測量・幾何・図学

英語の geometry は、ラテン語原義の古い語です。二つの語要素から作られています。接頭辞 **geo** は、我々が身近に眼にする地形のことですが、視野を広げて地球を指し、抽象的に、世界を意味する用語にも使います。後半の **metry** は、測定する意義の語です。長さの国際単位であるメートル(meter)は、これを引いた語です。したがって、geometry に当てる漢字熟語は、中国語の語順に並べ替え、動詞の意義を持つ測を頭にした測地です。土木・建築関係では、地形を測定するときの技術を測量(surveying)と言います。農地や宅地などの区画を決めることに応用しますが、言わば、地球上に作図をする実践作業です。幾何の原義は、漢文(中国語)の文字並びで「数量や程度が幾らあるか(何または許)?」の文脈の中で使われる用語です。これを「距離や面積がどれだけあるか?」の問いに準用したようです。「英語の読みを中国語に音訳した語」とする説もあったのですが、今では否定されています。和語では、一字の幾も何も含めていくばくの読みを当てました。万葉集に用例がある古い言い方です。漢和辞典の音訓索引にも載っています。今では文語的言い方とされ、常用漢字の口語読みからは省かれています。幾何は、実用技術を支える知識です。図形(平面・立体)の性質を研究する学問として、既にギリシャ時代(BC300 頃)に、現代の数学的方法としても通用する抽象化を進めた研究が行われました。これが、初等幾何学として分類されている学問です。カタカナ用語ではユークリッド幾何学と言います。図学(graphic science)は、作図の技術に応用する学問として、18 世紀の後半に、フランスのモンジュ(G. Monge; 1746-1818)が始めたとするのが定説です。

1.2 学を付けた幾何学・数学は硬い言葉である

人が社会生活をするために必要最小限の教養の一つが算数です。小学校の低学年の教育に組み込まれています。英語は elementary mathematics、硬い訳語が初等数学です。初等幾何の用語は、elementary geometry の訳語です。中等教育の年代に採り上げられていました。明治維新(1867)以降、日本は、欧米の文化・学問「科学(science)と技術(technology)」に学んで、近代化を図りました。その過程では、従来の日本語に無かった欧米語を、漢字熟語で表す方法を工夫しなければなりません。学の字を付けて専門分野を鮮明にし、権威化を図る用語命名の風習は、戦後から目立つようになりました。したがって、数学は硬い用語なのです。戦前までは、算法、算術、代数(algebra)の用語を使いました。幾何は、平面図形・立体形状の性質を扱う専門名であって、その応用の一つが平面図形の作図法です。幾何は、種々の数学的な方法を応用した専門化が研究されるようになったため、学を付けて幾何学の言い方ができました。しかし、この命名は、従来、学問好きの庶民にも親しまれてきた幾何を、身近の感覚から遠のけています。広辞苑逆引き辞典で幾何学を調べると、アフィン幾何学・位相幾何学・解析幾何学・画法幾何学・球面幾何学・座標幾何学・射影幾何学・代数幾何学・微分幾何学・非ユークリッド幾何学・平面幾何学・ユークリッド幾何学・リーマン幾何学・立体幾何学、などと並びます。どれも、中身は難しそうです。しかし、初等幾何学は抜けています。人名や、適切な日本語訳がない欧米語は、読みをカタカナ語にして使いますが、できれば漢字を当てた日本語訳を工夫するのが親切です。

1.3 虚学と実学

技術は、科学と並列、または対立させて言う用語です。和語では、「わざ(技)、すべ(術)」です。こちらは、種々の材料を総合して、農業・工業・商業・医業などに応用する研究態度をとります。そこに携わる経験を積んだ専門職を日本語では玄人(くろうと)、職人さんです。現代は、英語の professional を詰めて、プロの用語も使うようになりました。反義語がアマ(アマチュア: amateur)、日本語では素人(しろうと)です。技術の研究は、実学の用語があります。農学・工学・経済学・医学のように学をつけて権威化もしますが、机上の空論ではない、実用が目的です。科学は、実践を抽象化して研究を進めることもしますので、実社会では直接役に立たない権威主義(アカデミズム: academism)的な性格になることも多くみられ、軽蔑的に虚学と言うことがあります。実学は、科学に対抗して、実用主義(プラグマティズム: pragmatism)の学問と区別することがあります。主にアメリカで唱えられ、職業教育、専門教育を支える思想です。英語の profession は職業・専門の意です。大学教授を professor と言いますが、言わば職人の親玉です。専門とする分野については豊富な知識と経験を持つことで尊敬されますが、自分の専門外については一般常識に欠けることもありますので、軽蔑的に、また自虐的に、学者バカの俗称があります。また「職人は自分で経験することが大切であって、学問は必要ない」とする職業教育も伝統的(traditional)に行われています。これは保守的(conservative)と見られ、若い人には嫌われる傾向があります。日本では、職人さんに敬意を払う習慣があるのが救いです。若い後継者を育てる教育システムを、どのように構築すればよいかについては、教育学もあって、種々の模索が行われています。

1.4 科学は過去の事例を分析する方法を取る

英語の data は、datum の複数形です。英英辞典で見る、最も簡潔な説明は collections of known facts です。日本語に意識すると「既知(過去)の事物(複数形)の集積」です。データは日本語化した用語になりました。科学的な研究は、観察・測定などが実作業です。対象物からデータを取り出して、その性質を調べる、または何かの法則を発見するような態度をとります。これは保守的な態度です。幾つかある(過去の)データの中から恣意的に選択しますので、データに前例と当てると納得できることがあります。法律用語では判例が重要視されています。学術論文を発表するとき、参考文献が書いてないと、最初から受理されないことがあります。前例をいち早く海外資料に求めると、欧米崇拜になりますが、進歩的であると誤解されています。一方、技術は、これから何かを作ることの計画段階で応用しますので、視点が未来を向いていることが科学的な態度との大きな違いです。データは、捉えどころのない乱雑(ランダム)な性質で得られることが多いので、データ整理に統計的な方法を応用して法則性を発見、または表すこともします。潔癖な科学者は、統計学を使って、これから起こるかも知れない事象を確率で予測することを嫌います。アインシュタインは、「神はサイコロを振らない」の有名な言葉を残しました。科学者は、予知や予測をすることには保守的な態度を取ります。この違いは、東京電力の福島原子力発電所の設計・計画の際、地震と津波の予測値をどう決めたかの経緯を調査するとき、大きな問題として取り上げられました。技術者、そして、その上位の管理者は、客観的に見える物理的・数学的なデータの利用に、倫理的な責任観を持つことが重要であることを認識させる事例になりました。

1.5 モデルとモデリング

科学は英語の science の訳語です。学(ガク)の字が付いていますので、比較的新しい用語です。漢字の科は、生物などの種類を「分類する」、「区分けする」の意義があります。分類階級をグラフ理論の木構造に組み分けるときの漢字用語は「界、門、綱、目、科、属、種」です。科学的な研究は、物事(ものごと)を細かく観察し、本質的なもの、純粋なものを取り出して、理論や法則などを知る、または、発見する方法を探ります。細かく観察する過程では、余分な、または関係の薄いと考えられる部分を無視します。これを捨象と言い、残す部分を抽象と言い、どちらも結果的には同じ処理です。英語は、動名詞の abstracting です。abstract は、論文などを含めた文書作品の抄録を言いますが、作成過程は抽象です。抽象の反義語が具象です。和語は「象(かたち)を具(そなえる)」と読みます。現代は、モデリング(モデル化; modelling)の用語を使うようになりました。科学は、元々考えている物事(ものごと)の実態を「抽象化した対象物(モデル)に代えて扱うことをします。モデルだけに限定した研究を、独立した専門科学として扱うことをします。幾何では、対象物の幾何モデル、数学モデル、などを考えます。物(もの: 人の場合は者)と事(こと)は、日本の和語では数少ない抽象名詞です。物は実体(形)を持ち、法律用語では有体物と言います。ただし、形を持たない事象(無体物; 電気・情報など)も含めますが、窃盗の対象物になるからです。事は、動詞・形容詞などの名詞化です。この二つをまとめた英語は thing ですが、硬い用語が object です。英語の文法で他動詞の作用を説明するとき、目的語と訳している語です。コンピュータに関連する用語の例を二つ上げます; object-oriented database, object database。この二つの熟語の意味の違いが判るでしょうか? 前者は、object を具体的な事物に置換えて、例えば、graphics-oriented database(図の集合を扱うデータベース)のように言います。後者は、幾つか在るデータベースの中で、「今処理している、または、これから利用するデータベース」の意義で使います。意味と使い方に理解が及ばないため、oriented を指向(または志向)、と訳し、「オブジェクト指向データベース」の言い方で済ましているのが現状です。

1.6 技術は三つの要素を考える

人の社会活動で何かの技術を必要とする場面では、「三つの考え方の要素がある」と説明すれば納得し易いと筆者は思っています。三つの要素とは、道具①; その使い方を言う技法②; そして道具を使う人の技能③です。コンピュータの利用に関係する場面では、ハードウェア・ソフトウェア・ヒューマンインタフェースの用語があります。こちらは、元の英語でも日常使う普通名詞ではなく、言わば業界用語ですので、仕方なくカタカナ語で引用しますが、これをハード・ソフト・インタフェースのように詰めることもします。また英熟語綴りを短くするため、単語の頭文字だけを並べた、例えば DIT、DPI のような頭字語(acronym)となると、元の熟語を知らないで理解が進みません。初学者は、訳(わけ)の分からない用語の意味を、理解し、納得するまでに苦労を強いられます。漢字は表意文字ですので、その使い良さが再認識されるようになりました。しかし、欧米の人名はカタカナでしか表せません。幾何では特に多く使われています。道具・技法・技能は、分かりやすい説明用熟語です。この三番目の技能は、人が関係することを言います。身分差別をする社会では、上位の人は下位の人を、材料や道具の一つとする冷たい見方もあって、人材の用語があります。労働者さらには奴隷扱いをするときは、物よりも低位に扱い、使い捨てもあります。技能は、人によって得手・不得手、向き・不向き、上手・下手などの区別があります。専門ごとに経験と技能を積んだ人が、尊敬され、親しまれる社会が民主的であると言えます。

2. 度量衡を理解する

2.1 長さの単位は身体の寸法を元にした

度量衡とは、長さ・面積・体積・重さの単位系の総称です。学問として幾何を見るときは寸法数値を扱いませんが、実学では度量衡の知識は重要です。メートル法の提案以前、三つの単位系相互に何の関係もありませんでした。日本では、古くは尺貫法です。英米ではフィート・ポンド法(またはヤード・ポンド法)を使います。まず、長さの単位から説明します。人の手作業は、腕を動かす範囲、長い距離は歩くことで測ることが基本です。日本では腕の長さを基にした尺、欧米では足の長さを基にしたフィートが使われていました。明治維新以降、日本は、多くの技術をアメリカに学びましたが、尺とフィートがほとんど同寸法(約 30cm)ですので、大工さんなどの職人レベルでも、地図や構造物の設計図を素直に理解することができました。人の平均身長は 6 尺弱です。日本の 1 間長さは 6 尺です。ヤードは、ゴルフ場で距離を言うときの用語で知られていて、3 フィート単位です。長い距離を言うとき、日本では 1 町(または 1 丁)を 60 間(約 109m)、さらに 36 町を 1 里(約 4km)とする単位を使いました。市街地は 1 町で区切ることが普通です。銀座 8 町は、900m の長さがあります。街中(まちなか)で道を尋ねると、昔風の人は「三町先を左」のような言い方をしました。距離は、歩く時間で言い換えることもします。例えば、駅から歩いて 15 分のように言います。歩く速さにも個人差がありますが、100m は約 1 分掛かります。余談になりますが、都市化が進んで、現代人は長い距離を歩く機会が減ってきました、健康を志向して、一日一万歩を歩く事が勧められています。一万歩の距離は、復歩で 5000 歩ですので(次節参照)、約 5 マイル=8800 ヤード $\div$ 8km $\div$ 2 里、歩く時間にすると、約 2 時間弱です。これらの数値を個人ごとに知っていれば、万歩計のような機械を頼りにしなくても、どれだけ歩いたかが感覚的に分かります。

2.2 歩測で測る

歩いて長い距離を測ることは、個人差による補正が必要ですが、非常に正確です。建設系の学科を持つ大学や専門学校では、測量学を教室内の授業科目に持ち、野外に出て作業をする実習を必須として測量器具の使い方などを習います。筆者は、測量実習の最初に、歩測で距離を測る方法を組みました。100m の長さを巻尺で区切り、自分の歩数で何歩かを各自で確認させた上で、現地の地図をスケッチで作成させる演習です。すると、かなり正確な地図が描けることを納得してくれます。この演習を済ませた後に、測量器具を使って地図の作成に当たさせます。長さを間違えて作図する単純なミスはほとんど起こしません。

一方、1 マイル(mile)の長さは約 1.6km です。マイルは、ラテン語で 1000 を意味する語です。ローマ時代の軍隊は、広いヨーロッパの地形を歩いて測りましたが、1000 復歩(2 歩単位)の距離を 1 マイルと決めたのです。1 マイルの長さを 1760 ヤードと定義したのは後からのすり合わせです、1 マイルごとに目印としてマイルストーンを建てました。日本の 1 里塚も考え方は同じです。長さの表し方に続けて、面積の表し方も弁えておく必要があります。農地などの面積を言うとき、1 町歩は、長さ 1 町 $\times$ 1 町「=3600 歩(=坪)」の広さではなく、3000 坪(0.992 ヘクタール)です。これはメートル法のヘクタールと相性が良い寸法です。宅地の広さを言うときは、1 間 $\times$ 1 間に坪の方の用語を使いました。畳の寸法は 3 尺 $\times$ 6 尺で製作されます。日本住宅の部屋の広さは畳の枚数で言います。しかし、部屋単位は柱と敷居で区切るため、その幅をどのように含ませるかで、畳の寸法に大小の差がでます。柱の心々間隔が一間(6 尺)である部屋を田舎間、6.5 尺にした部屋を京間と言います。長さや面積は、現在ではメートル法(次の 2.3 節に解説)を使いますが、古い建造物の資料を参照するとき尺貫法の知識が常識として必要です。またアメリカの文献をみるときは、フィート・ポンド法の知識が必要です。

2.3 メートルは人為的に決めた長さである

世界共通の長さの単位となったメートル法は、科学好きのフランスで 1791 年、国民議会で提案が認められ、具体的な不変値として、地球一周の長さを考えました。それを 4 万キロメートルとするように人為的に決めたものです。この提案は、社会活動が広い地域に発達してきたことで、地域ごとに長さの単位が異なることの不利の解消になるとして、メートル法に賛同する国が増えました。しかし、根強い反対も多く、当のフランスでも、国際的なメートル条約が締結され、さらに、罰則を伴う法律で使用が義務化された 1875 年までの約 80 年間、普及しませんでした。日本は 1885 年(明 18)にメートル条約に加入したのですが、メートル法の採用が法律で義務化されたのは 1966 年(昭 41)からです。80 年もの啓蒙期間が掛かりました。和裁が教養の一つであった大正時代の女学生は、「1 メートルは 3 尺 3 寸」と呪文のように覚えさせられました。しかし、メートル法を採用していない最大の国がアメリカ(合衆国)です。アメリカ主導のコンピュータ関連技術では、フィートとインチを基にした寸法が使われています。筆者は、大学の教育職に籍があるとき、必修科目の材料学の定期試験に「8 畳の広さは何坪か?」、「1 インチは何 cm か?」と出題していました。一度聞けば済む問題ですが、知らなかった人がいるのです。答えられなかった学生は、他の問題が正しい答えであっても、単位の認定をしませんでした。卒業間近になって泣きついてくる学生は、友達付き合いが狭いことが多いので、その際に注意していました。

2.4 地形に作図する実践

何も目印がない平地に木造住宅を建てる時、大工さんは、日の出・日の入りの向きを見て、正確に東西南北方向に建物の線を添わせませす。また、南向きの部屋では、屋根または庇(ひさし)の張り出しを、雨の振込みを避け、夏の太陽光が直接差し込まないような長さにします。これは、間接的ですが、その地域の緯度を考えています。現代はせせこましくなって、張り出し分だけ建物敷地が減ることを嫌い、洋風建築が多くなりました。そのため、庇のない洋風のビルの外壁やガラス窓は、定期的に拭くことをします。奈良の平城京、京都平安京の道路網は、東西南北の線に沿わせた都市計画がされました。これは直交座標系の考え方ですが、座標の原点をどのような根拠で決めたかは分かっていません。地球には丸みがありますので、地域を広く考えると経線は北で狭くなるからです。国土地理院の広域地図は僅かですが台形に描かれています。幾何は、学問的な知識と言うよりも、農地や宅地などの造成に応用する、実践的な測定と作図技術です。地形を意味するラテン語の接頭辞 geo を持つ英語原義の用語が幾つかあります。幾何と関係のある用語に絞ると、測地学(geodesy)・地理学(geography)・地質学(geology)・地球数学(geomatics)・幾何学(geometry)・地形学(geomorphology)・地球物理学(geophysics)・地政学(geopolitics)があります。英語の geometry を幾何と訳しましたので、地形を測る意義の用語は、測地学(geodesy)を使います。土木・建築関連の用語が測量です。これにも幾つかの専門分化があって、基線測量・三角測量・写真測量・水準測量・水路測量・スタジア測量・地下測量・トラバース測量・路線測量・応用として曲線設置法、などがあります。分化が進み過ぎると、対象も、また視野も狭くなりがちです。そのため、専門違いを鮮明にした研究名を付けて分化を進めても、排他的な、また独善的な態度を取らず、垣根を低くして研究を進める学際(interdisciplinary)交流が注目されるようになっています。

2.5 容積と体積の単位系

日本の尺貫法では、容積の実用計量単位に、十進の石・斗・升・合(こく・と・しょう・ごう)を使っていました。メートル法のリットル単位との換算が便利のように数値を少し変えて、明治時代に1升=1.8リットルに決めました。これらの単位は現在では使いませんが、一合枰・一升瓶・一斗缶は普通名詞のように使っています。これは長さとは無関係に決めた単位系です。ただし、石材の計量には切(さい)があって1立方尺です。コンクリートミキサーの容量を言うときに使っていました。木材では、10立方尺(1尺×1尺×10尺)が一石(こく)です。ブリキ製の角形の石油缶の容量は18リットルです。同じ容量のポリエチレン容器は、石油ストーブ用の石油容器として使われていますが、満タンが切りの良い20リットルではないことに、違和感を持つ人もいます。日本の酒樽は2斗容量がよく使われています。一方、フィート・ポンド法の容器には、アメリカ仕様のガロン缶があって、その容量は3.7リットルです。ガソリンなどの揮発性石油製品の容器の名称です。大きな容量単位にバレル(barrel)があります。元の意味は木製の樽です。石油原油の保存と輸送用の容器として使う容量単位(約160リットル)の名称です。鉄製のドラム缶は、太鼓の形状からドラムと言うのですが、200リットルの容量です。なお、ポルトランドセメントは、比重が大きいので(約3)、やや小さめの木樽に入れて保存と輸送に使いました。担いで運ぶことを考えた、50kgの重量に抑えるためでした。現代では、粉体輸送のトラックなどで扱っています。

2.6 重量単位と質量単位

重量と質量とは、物理的には異なった次元(dimension)の量です。重量は「質量×地球の重力加速度」で計算される力です。地球上では、場所によって微妙に重力加速度が異なります。高い山の上では平地よりも加速度が低くなります。また、重さは、厳密には空気の浮力も関係してきます。このこともあって、質量を言うときは、kg単位の数で言いますが、重量キログラムであることを表す力の記号はkgfと書きます。構造物の材料の弾力的な反発力や強度は、重力とは無関係の力です。単位系の名称ニュートン(SI:記号は大文字のN)は、1kgの質量物質に1m/s²の加速度を生じさせる力と定義して、1948年に国際単位系)になりました。戦前までの材料試験機は、竿秤の原理で製作されていて、検定で質量の分かった錘との比較で測定しました。これは重力加速度を相殺する質量測定法ですので、試験機の設置場所違いで秤量表示が変動することはありません。しかし、家庭で使うヘルスメータやお料理用の小型の秤はバネ秤ですので、重力加速度の影響を受けます。そのため、家庭用と表示があり、また許容できる秤量の目盛りもやや粗くしてあります。

日本の尺貫法で使っていた貫の単位は、長さの単位とは無関係です。しかし、水や油などの容量とは関連を付けて認識されています。お米は、藁で編んだ1俵を約4斗でまとめ、60kg(=16貫)を単位にしました。成人男子の平均体重が60kgであることも、この数値を覚え易くしています。ただし、水4斗は72kgにもなります。したがって、持ち運びを考えた酒樽は2斗樽が最大です。重さの単位名に、実用的にはトンも使います。これには、英トン・米トン・メートルトン・質量トン・重量トン、さらに容量トンなどがあって、使い分けがあります。なお、フィート・ポンド法では、2000 ポンドを1トンしていて、約900kgです。力の単位は長さの次元を持っていますので、物の重さも「間接的ですが、幾何と関係しています」。

3. 産業と幾何との関わり

3.1 略奪産業が横行していること

産業は、便宜的に、第一次・第二次・、第三次と区別します。**第一次産業**は、自然を相手にして資源を得る産業です。主に、食糧を得る**栽培農業**が古くから重要視され、この目的のため、土地改良と住環境の整備をして、人の定住化が図られてきました。**拓殖**(たくしょく)の用語もあって、新しく農地を開拓することを言います。**農業土木**と、ほぼ同義です。人の生活環境は、良質の飲料水と、灌漑と水運とに使う**用水**が得られることが必要です。幾何の始まりは、エジプトのナイル川沿いに農地を整備すること応用されたとされ、歴史の古い実用知識です。農業は手間と時間の掛かる産業です。手間を掛けない方法の代表が**収奪農業**です。水産業もそうです。**略奪産業**とも言います。**焼畑農業**は、自然を破壊する略奪産業と見なされることがあります。森林資源が収奪された土地で、農地として再利用する一つの方法です。植物の灰は、肥料になるからです。しかし、自然が持つ再生力を超えた収奪は、結果的に人の生活環境の破壊が起こります。近年、後先を考えず、資源を取り尽くすような行為が懸念されようになってきました。水産業は収奪産業の性格がありますが、取り尽くすことを制限する対策と共に、**栽培漁業**が研究されるようになりました。木材は成長に年数が掛かることもあって、林業も略奪的な性格のある産業です。有史以前、世界は豊富な巨木資源があったようです。欧米に、ノアの方舟、トロイの木馬の伝説があったことは、木材が豊富に利用できたことを想像させます。しかし、**大航海時代**(第 3.3 節に解説)には、帆船製作、とりわけ帆柱に適した材料として**レバノン杉**が大量に伐採されました。現在のレバノンは、国旗の図柄にレバノン杉が描かれていて、国を挙げてレバノン杉の保護と植林に当たっています。南米のアマゾンには、近年まで豊富な森林資源が残っていますが、その乱伐が問題になっています。日本でも**巨木**が豊富に有ったことが知られています。出雲(島根県)には巨木を使った神殿の柱の遺跡が見つかっています。しかし、奈良東大寺の大仏殿の再建時(1691 年)には、既に創建時(758 年)に使ったような巨木が日本中探しても得られなくなっていました。大仏殿そのものも、創建時の長手方向の長さ約 86m を 2/3 に縮小して建立しなければならなかったのです。**栽培林業**の例には、伊勢神宮の 20 年ごとの式年遷宮用の木材を供給する御用林の歴史がありますが、民間事業としての栽培林業の存続は難しい時代になってきました。

3.2 人類は厄介な動物であること

残念なことに、社会環境では、人を相手とする略奪産業、つまり泥棒や強盗も現れます。この歴史も古いものです。桃太郎の童話は、桃太郎を英雄扱い、鬼を悪者扱いして、鬼の宝物を略奪する話です。鬼の立場から言えば桃太郎は強盗です。我々人類は、万物の霊長であると言いますが、雑食性の動物の一種であり、攻撃性の強い集団を作ります。人類の歴史は、闘争や戦争の連続です。人肉を喰うことを目的とすることもあります。そうでない無差別の殺戮と、破壊を伴う略奪が実行されてきたことの歴史です。人は、欲望に歯止めが掛からないこともある厄介な動物です。歴史の古い宗教は相当に攻撃的(offensive)です。日本でキリスト教の信仰を弾圧したのは、その攻撃性を恐れたことが理由の一つです。大陸経由の仏教は、日本に文化をもたらしましたが、攻撃的な面も持っていました。「何とか山・何とか寺」の命名は、山城を築き、僧兵を抱えたことに因りました。武蔵坊弁慶は、比叡山延暦寺の僧兵でしたので薙刀(なぎなた)を持っていたのです。平地のお寺でも、堀を巡らして敷地を囲います。神社の神域が開放的であるのとは対照的です。近代では「何とか主義」のような理論武装をする集団もあり、政治に介入し、独立を主張し、敵を峻別して、相手に対する殺戮と破壊とを**正当化**する武装闘争を容認しています。これは、宗教集団の一種と考えると納得できるでしょう。

3.3 大航海時代の幾何

上の節の説明と同じ一方的な**正当化**の論理は、欧米列強が **15 世紀**半ばから **17 世紀**半ば頃まで世界各地に植民地を奪い合った大航海時代の歴史に見られます。初期にはスペインとポルトガルが席卷しましたが、18 世紀以降はイギリスが世界各地に制海権を持つ大英帝国になりました。大航海時代には、種々の科学技術を開発・発展させることが必要でした。その時代、地中海のような海とは勝手が違う外洋航海では、自分の船の位置を見失う**海難事故**が多発しました。帆船の現在位置を把握するためには、地球上の位置を定義する世界座標系を決めなければなりません。これが**緯度・経度**を使う幾何学的システムです。基準とする子午線は、イギリスのグリニッジ天文台を通る子午線位置を経度 0 とし、そこでの太陽の南中時刻を元にして標準時(GMT)を決めました。次の課題は、何も目印のない海洋上で、自分の船がどこに居るかの緯度・経度を測定することです。緯度は、**六分儀**を使って求められます。経度は、標準時に同期させた時計を持って行き、現地の太陽の南中時刻の差から求めます。**1714 年**イギリス議会は高精度で経度を測定できる方法の発見に懸賞金を出す**経度法**(法律)を制定しました。経度の測定には、船の揺れによって時刻が不正確になる振り子時計に換えてゼンマイ式時計の発明(1735)が必要でした。これが**マリン・クロノメータ**です。

3.4 地理と幾何

小学校の地理教育は、身近な地域の学習が主です。世界地理を理解させるために地球儀も使います。中学校で、広い範囲を描いた日本地図を使った教育に進みます。丸い球形をした地球の地理を扱うとき、平面図形にした世界地図を見ることになるのですが、これが不思議な形状に描かれていることの理解が必要です。図1は、ゴム毯状の地球モデルの球面を茶筒のような円柱に変形し、子午線の一つに沿って側面を展開図に切り開いて世界全図を描いた例です。赤道添いは、ほぼ実形です。しかし、北極と南極に近いところは極端に横幅が広く描かれてしまいます。

一方、図2はカナダの州区分地図を示した地図です。図1のカナダの図形では東西方向の横幅が広いのですが、図2は、ほぼ実形に相似した図が描かれています。これらの平面化した地図は、球面に描かれた図形の投影で作図されますので、幾何の応用です。種々の投影法が工夫されています。

図2で注目したいことは、緯線・経線に沿わせて州の境界線が引かれている場所があることです。これは、陸上で、航海術を応用した測量で決めた線です。子午線に沿わせた経線と、同緯度の地点を連ねた緯線で区画を囲います。地球の自転軸方向から見た緯線の図形は、直径の異なる同心円の弧です。

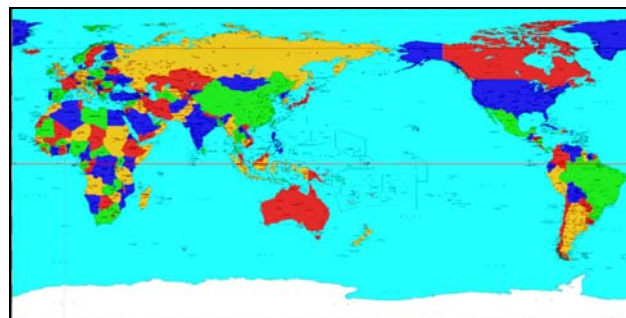


図1 メルカトル図法で描いた世界地図



図2 カナダの州区分地図

3.5 非ユークリッド幾何学の誕生

身近な狭い地域の地図ならば、緯線・経線を近似的に平面的な直交座標系とした地図でも実用上の不便はありません。しかし、地球の丸みを考えると、球面上の図形は、平面幾何学の図形と相似に見えても幾何学的には同じ扱いができません。初等幾何で考える平面直線に換えて、曲面(球面・楕円体・円錐面・双曲面)上では、曲面に沿わせて、最短距離で二点を結ぶ立体的な曲線を、疑似的に平面図形の直線状の線分と同じ幾何学的要素と約束します。地球のような球面では、球の大円の弧であって、三次元的には曲線です。平面幾何では、平行線は交わらないことが公理です。しかし、球面では平面幾何学的な平行線を定義することができません。平行線に似せて近接して二本の大円を描くと、二点で交差ができます。また、疑似的に三角形を球面に描くと、三角形の内角の和は2直角よりも大きくなります。そこで、初等幾何学の方をユークリッド幾何学とし、球面上の図形を扱う方を非ユークリッド幾何学と言う提唱が 1823 年に始まりました。ボヤイとロバチェフスキーの二人が提唱者とされています。カタカナ語を使わない実践向きの用語が球面幾何学です。次に続く課題が、非ユークリッド幾何学を応用する作図技法の研究です。その一つが世界地図の作図法です。

3.6 第二次産業は市場原理が働く

第二次産業は、資源を加工して製品化する工業を指し、建設業も含めます。**産業(industry)**を支える実用技術は、「…法」「…術」の言い方をします。道路や橋は **infrastructure(公共資本; インフラストラクチャ; 詰めてインフラ)**と総称され、幾何学的な形状の構造物です。公共**財産**の見方をしますので、経済が関係してきます。石油の採油、鉄鉱石の採掘も二次産業に含めますが、むしろ、近代化した第一次産業の性格があります。第二次産業には市場原理が働き、価格競争の場もできます。市場(しじょう)を和語ではいちばと読み、単に**いち**とも使う庶民的は言葉です。基本的には、食と住とを安定して維持・保存・流通・確保することなどを目的とする技術が扱われます。肉体労働よりも、改良や工夫を加える知的な労働に努力を注ぐ産業です。ここにも略奪産業があります。海賊は、大航海時代には英雄視もされていて、海賊船の船長の名前も記録に残っています。図書に関して**海賊出版**の用語があるように、知的財産の盗用もあります。「盗人(ぬすっと)にも三分の理」の慣用句があるように「軽度の窃盗ならば犯罪行為とは見なさない」こともあります。また鼠小僧治郎吉や石川五右衛門の名前が有名人のようにも扱われます。しかし、盗まれる側では深刻な問題です。知的財産の場合、その保護と育成とを目的として、文化的には**著作権法**、科学技術的には**特許法**が制定されています。

3.7 学芸は第三次産業に入れる

第三次産業は、第一次と第二次を除く残りの産業であって、主に学芸(学問と芸術)に関するものです。どちらも、本人が楽しむ趣味的な活動であれば、利潤を得ることを主目的とはしないのが普通です。しかし、経費を賄うことも重要ですので、ここでも産業活動が起こります。美術品は金銭欲の対象にもなり、骨董品の市場などもできて、投機的な価格が動きます。学術的な活動では、**教育産業**の用語もあります。名誉欲が励みになることがあります。世俗的には**目立ちたがり屋**がそうです。日本では和算の問題と解答を算額にまとめ、神社や仏閣に奉納する習慣がありました。そこは、多くの人に見てもらえる一種の公開の場です。近年は、SNS(ソーシャル・ネットワーキング・サービス)の利用が増えています。

幾何は、そもそも、地形の表面領域に、農地や都市計画の平面図形を作図する実用技術が始まりですが、古代ギリシャ時代(BC300 頃)に、現在でも意義を失わない学問的方法論で研究されました。文化史から見ると、全く唐突に現れた一過性の現象であって、その後、18 世紀に注目されるようになるまで、長い空白期間が続きました。幾何は、或る教義(ここではユークリッドの公準)を信じる秘密結社または宗教団体のような組織で研究されました。宗教は、人の精神活動と関係する神秘的な面があります。人は肉体的(physical)には五感で刺激を感じますが、それとは別に感情「喜怒哀楽・愛・憎・好・嫌・欲望・嫉妬など」も表現する、また感受(感じること)もします。こちらにも学問的な態度で研究する分野があって、**哲学**(philosophy)としています。余談ですが、phil は、「愛する」を意味するラテン語原義の綴りです。地名では Philadelphia 人名では Philip があります。音楽を愛する(philharmonic)、趣味で郵便切手の収集をする人を(philatelist)と言うような言葉に使っています。宗教は、哲学で理論武装しますが、宗教家は、あらゆる事象を「すべては神の思し召し」と説いて済ませ、都合の悪い主張や説明を抑える権威主義に走る狡さもあります。

3.8 天文・地文・人文

表題は、「てんもん・ちもん・じんもん」と読みます。土木工学には水文学(すいもんがく)があります。(みずぶんがく)と読むことを避けて、**水理学**、または**水力学**に換えた用語を使っています。人文は、現代では(じんぶん)と読ませます。**天地人**と使う熟語は、人から見た世界観を抽象的に言う言葉です。人の精神作用で理解しますので、宗教とも絡みます。**地動説**は世界観の一つですが、中世のキリスト教では絶対の真理とされたので、**天動説**を主張するガリレオが反キリスト教であるとして宗教家から迫害を受けたとする言い伝えがあります。人の生活環境、また人の集合である社会環境は、居住地域の自然との付き合いを必要としますので、学際的な学問分野として、**人文地理学**(human geography)が、特に戦後、注目されるようになりました。地理学は地形の形状を扱うため、幾何と関係を持ちます。戦前の地理学は、地域の産業活動の紹介もありましたが、人文地理学では、**地政学**(geopolitics)、**政治地理学**(political geography)を含めるようになりました。これらは、国家的な戦略決定などに応用される生臭さがあります。

3.9 数式が使えない幾何学的量

ギリシャ時代の幾何は、図形の性質を説明する目的で、用語を定義し、言葉で説明して客観的に納得させる方法(**論証**または**証明**)を使いました。ギリシャ時代、幾何学的数量(点・線分)の理解には、未だ集合の概念(精神作用による理解)がありませんでした。有限個数の**数字**並び(整数)を使って**デジタル的**に四則演算を行わせる約束はありません。直角三角形では三平方の定理(アルキメデスの定理)が成り立つのですが、三辺の長さの比が整数の組、それも何組もあることが発見されていました。幾何では、図形としての点は、一つ二つと数え上げることができます。親指を除く指のことを英語で digit と言います。デジタル(digital)はこれからきた用語です。標準的には**順序数**として使います。**有理数**は、整数を分子・分母にを使って**分数**で得られ、有限個数の数字並びで表すことができますので**デジタル量**であると言います。三角形の辺の比を整数で表すときは、辺の長さを有理数で表すことができます。しかし、無理数でしか表すことができない長さもあることが判りましたので、長さを、有限個数の数字並びに置き換えて研究することを封印して、数を図形で表す方法を使いました。近代では**アナログ量**であると言います。点は、便宜的に図に描いて理解し、直線は点の並びであると考えられることもします。これは、辺の長さをデジタル量として扱うことを意味しています。紙は実体を持ち、裏表の区別があり、描かれた線分では向きの約束を決めることができます。しかし、幾何学の方では正しい認識であるとはしません。点は、所在を認識する概念であって、実体がありません。演算子記号(+・-・×・÷=など)と共に表す**数式**を使う説明方法ありません。代数学では、**数式**を使うことができますが、それを幾何の研究に応用することは、ずっと時代が下って、18 世紀頃から表記法が定まったようです。数式は、数字・文字・記号の並びですが、文章に直して正しく読めるように表す論理的な約束が必要です。この約束は、コンピュータのプログラミング言語に応用されています。COBOL は、式を文章で表す方法と、数式を使う方法の両方で書くことができます。FORTRAN は、数式を解釈して、計算手順をコンピュータに知らせる言語です。

4. 可視化の話題

4.1 可視化は新しい技術用語です

可視化とは、目で直接「見る」ことのできない現象・事象を「見る」ことのできるもの（画像・グラフ・図・表など）に変換する技術と言う新しい用語です。定義を広げて、日常見ている形状を平面図形に描くことも含めます。英語は、**visualization** が名詞、動詞は **visualize** です。カタカナ語で表すと、字数が増えますので、可視化と使う方が普通です。平面図形の性質を研究するとき、幾何学の方で扱う点・線分・円などは、場所を指す概念ですので、実体がありません。紙に図形を作図して研究するギリシャ時代の初等幾何学は、現代から見れば、可視化技術の研究です。絵画の作成も、可視化技術の応用と考えることができます。画家は風景画も描きますが、**鳥観図**は画家の技能で描きます。と言うのも、その風景が見える場所に行くことが物理的には不可能であるからです。絵画で言う**遠近法**は、作図の技法を言い、英語原義の**パース**(perspective)とも言います。作図の技法で言えば**投影法**であって、数学的には**射影変換**の応用です。18 世紀以降、科学技術の研究には、グラフの作成に使う電気機械式の作図装置が開発されました。写真も、可視化の技術で作成されます。戦後、**陰極線管**(CRT; Cathode Ray Tube)を転用して、テレビ放送の時代が始まりました。これは静止画よりも、動画の作成に重点があります。この CRT は、パソコンのモニタに利用する方向に発展してきました。モニタ上の画像は、電源を切れれば、後に何も残りません。これも、一過性です。そこで、画像を用紙にプリントする装置の開発が必要になりました。用語として、モニタ上の画像を**ソフトコピー**、用紙に印刷した画像を**ハードコピー**と区別する言い方が生まれました。コンピュータソフトの MS-EXCEL には、表計算の結果をグラフに描いてくれる機能を持っていて、**ビジネスグラフ**の作図と総称しています。なお、地震計は、地震動を可視化する道具であって、英語では seismograph、地震波形の図は seismogram です。接尾辞として-graph と使うときは、装置の意味、-gram は文書の意味で使う語です。**グラム**が重量単位を表す語ですので、カタカナ語で使うことを避けます。

4.2 定木とコンパスを使う仮想の作図法

初等幾何学では、**定木**と**コンパス**は仮想の道具であって、その道具だけを使う仮想の作図技法を研究します。実用する作図道具は、**製図用具**と呼ばれ、文房具です。人が作業に使う、目盛り付きの定木は、**定規**の用語を当てます。限られた寸法の用紙に、その中に納まるように、眼に見える適度な寸法で図形を描き、それを見て図形を確認し、幾何学的性質を調べます。その図形は、線分と円だけの組み合わせです。多角形は線分の組み合わせで作図される図形ですが、三角形が多く扱われます。新しくそれらに名前を付けて理解を助けます。三角形では、正三角形・二等辺三角形・直角三角形・鋭角三角形・鈍角三角形の五種類です。図を使うことで、この区別を感覚的に理解できます。それらの図形と共に、補助的に線分(補助線)を追加し、交点を求め、また補助的に追加の円を描き、それらとの組み合わせた図形を見ることもします。そうすることで新しい発見があります。三角形の**五心**は「重心・外心・垂心・内心・傍心」です。図形としては点を描きます。補助線を引いて作図することで、意味が理解できる用語になったものです。**補助線**を引くことで理解が進み、新しい発見もあることが、初等幾何の面白いところです。したがって、新しく図形の性質を発見した人の名前を付けた定理が多く見られるのです。三角形の五心の名前ならば、具体的に意味も分かりますが、人名で呼ばれる定理は、そのままでは何も分かりませんし、図で表しても、現実的な応用には多く表れないため、抽象性の高い学問を構成します。これが幾何の学習を難しくしている理由の一つです。

4.3 初等幾何学は寸法数字を使わない

実践的な作図技術では、座標を決め、位置を座標数値で決めます。したがって、目盛りの付いた定規(物差し)は必須の道具です。しかし、ギリシャ時代の初等幾何学では、まだ座標の概念がなく、数式で表すこともしません。すべて言葉で説明します。これが、論の字を使う**論証**(または**証明**: demonstration)です。「幾何学は論証の学問である」との誤解も生まれます。幾何学的な性質を説明するとき、式を使う方が分かり易いときと、逆に分かり難くなるときとがあります。複雑な図形は、数値計算に向くような公式化が難しくなります。構造物の設計などの実践的な場面では、手計算の計算手順をコンピュータに教える文書をプログラミング言語で書きます。数値計算は、有限の桁数で表される数しか処理できません。幾何学的な性質の研究にコンピュータを利用するのは、高速計算と大量処理に利点があるためです。そのため、幾何学的な性質を数値計算で得たいとき、理論的な予測値との誤差をどのように解釈し、また解決するかが大きな問題になります。例えば、三角形の重心位置の座標を数値計算で求めたいとき、**頂点と対辺の中点**を結ぶ三本の線分は一点、つまり重心で交わるというのが**重心定理**です。そこで、線分を代数式で表し、2線分ずつ選んで3つの交点を計算すると、その3点の座標は、必ずしも同じ数値になりません。重心位置の座標を他の場面で利用するとき、数値が三種類になることが悪さを起こすことがあります。重心位置の計算は、三頂点座標値の平均値で求める方法もあります。どの計算法を使うのが良いかは、経験で決めることが多くなります。

5. 曲線を扱う幾何

5.1 折れ線図形

折れ線図形とは、直線状の線分を順に繋いだ図形です。線分の繋ぎ目(節点:node)で向きが変わります。その曲がり角度を小さく抑え、また線分の長さも短くすると、近似的に曲線になります。この操作に微分・積分の概念を使った図形が曲線の定義です。この分野は、**微分幾何学**として研究されるようになりました。実際の作図技術は、有限個数の参考点(節点)を決めて、それらを繋ぐように製図用具の**曲線定木**を当てて曲線を引きます。すべての点を一回の操作で繋ぐことはできませんので、3~4点順に、それらを結べる曲線形を持った定木を選びます。数学的には、二次式と三次式とを応用し、繋ぎの節点(node)で接線を連続させます。これを実現させるまでには、長い空白の歴史がありました。座標を決め、数式を応用するからです。二次式・三次式を応用する曲線の作図では、自動車の設計に応用する**ベジエ曲線**があります。コンピュータを利用しますので、20 世紀の半ばからが始まった新しい技術です(図3)。



図3 参考点を決めて三次曲線を引く

5.2 右回りと左まわりの螺旋

人の身体構造は心臓が左に寄っていますので、利き腕は右であるのが普通です。右手首も右回りに使うことが自然です。時計の針は右回りですし、昔のゼンマイ式の時計の**螺子**(ネジ)も右に回すように作られています。右手系の**直交座標**と言うときは、 x 軸の正の向きを原点から水平に右向きと約束し、 y 軸は、上から見て x 軸を左回りに 90 度回して、上方向(紙では手前から向こう向き)に約束します。三角関数の角度を言うとき、 x 軸の向きから左回りに測る約束です。標準的な三次元の**右手系座標軸**は、 x 、 y 軸を水平面に引き、高さ方向を z 軸とします。一般的には、座標軸は、右手の親指・人差し指・中指の向きの順としています。座標系の考え方は、デカルトに始まるとされていて、標準として使う右手系の直交座標を**デカルト座標**とも呼びます。平面曲線そして立体曲線も、その形状を定義するとき、曲線の或る位置を原点に決め、曲線に沿わせて測った長さを疑似的に一次元の座標とし、それを媒介変数(例えば s)として曲線の位置座標を、 $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ のように表す方法があります。そうすると、その位置での曲線の接線を単位長さのベクトル「 (dx/ds) , (dy/ds) , (dz/ds) 」で表すことができます。同時に、曲線の正負の向きが決まります。ここで、線分の向き、面の裏表の区別、左右の違いを言い分けることは、身近に多くあります。これを幾何の課題とした研究が**位相幾何学**(トポロジー: topology)です。

ここで、最も眼にする機会の多い三次元曲線として**螺旋**(らせん: spiral)の向きの定義方法を説明します。ネジは家庭用品として種々の直径の円柱に螺旋形の溝を切ります。二つの物をネジで止めるとき、ドライバを右回りにすることが標準の締める向きです。これが**右ネジ**です。右ネジは、右に回すと、手前から向こう側に進みます。ところが反対側から見れば、左に回すとネジは手前に移動します。朝顔の花の弦(つる)は左巻きと言うのが常識とされているのですが、これは朝顔の弦が上に伸びる向きを上から見ていることから言うのですが、幾何学的には右ネジと同じ螺旋です。**巻貝**の向きでは、上から見て渦巻きの始点から右回りに広がる向きの右巻貝が多く見られます。

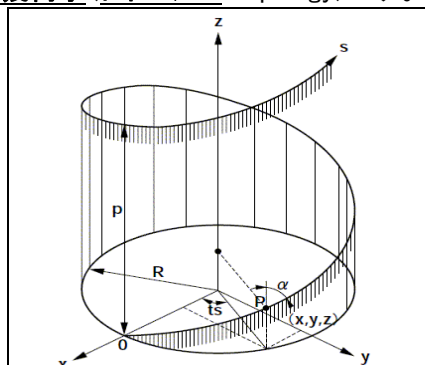


図4 右ネジに使う螺旋

吊橋や斜張橋の主ケーブル使うワイヤーロープは、ピッチの長い螺旋形で右捻りと左捻りを交互に層状に構成して捻りが解(ほど)けないようにしたスパイラルロープを使う例があります。このときの左右の区別をする用語に**S 捻り**、**Z 捻り**の用語を使います。ロープを縦位置にした螺旋の外形を手前から見て、素線が斜めになる向きを、英大文字の S と Z の斜め向きの線の向きで区別する方法です。 Z 捻りが、上で説明した右ネジ向きになります。

なお、英字の N も S と同じ斜め向きの線分を描きますが、この向きの斜線は否定 No の記号を示す意味で使う意義があります。駐車禁止の道路標識の斜めの線がそうです。男性のネクタイの図柄に斜めの線を描くときは、 Z の字の方を使います。

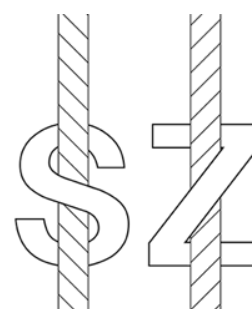


図5 S捻りとZ捻り

6. 幾何パズルとトポロジー

6.1 二次元図形の並べ替えパズル

図6は、平面図形の並べ替えのパズルの一例です。右側の図では一個分の隙間があって、正方形のプラスチックピースを上下・左右に移動させる道を作っています。逆の見方もある、隙間の図形が動く対象物であると考えられることもできます。左側の図が完成させた図です。隙間の部分は、別に残しておいた星形のピースで埋めます。なお、完成図では、ピースの座標位置は一意に決まっていますが、ここでは、二つのハート図形を左右入れ替える遊びが目的です。



図6 隙間を使って正方形のピースを移動させる

6.2 サイコロは二種ある

サイコロは、ありふれた遊び道具です。面に表示している目の数の位置関係に二種類あります。筆者の独断で、左サイコロと右サイコロと言い分けました。数1, 2, 3の各面で、目の向きの順が、左手系であるか、右手系であるかで区別します。サイコロの形状を区別するのではなく、面の向きの性質の、トポロジ的な区別です、もう一つの注意したい代数的な性質があります。注目している面と反対側の面と、数が互いに7の補数になっていることです。図から見えない面の、目の数が分かります。

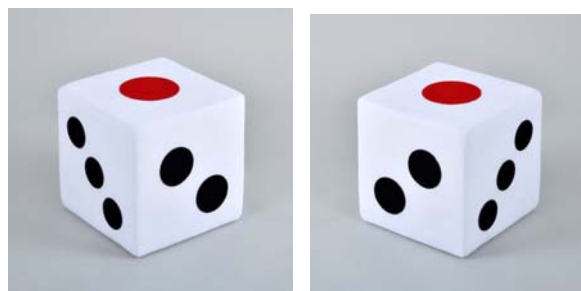


図7 左サイコロと右サイコロ

6.3 ルービックキューブ

ルービックキューブの構造は、見掛け上は $3 \times 3 \times 3 = 27$ 個の正立法体(キューブ)の集合です。しかし、見える個数は 26 です。手に持って回転させる単位は、9 個で構成する層状の面です。個々のキューブには、位置関係、つまり、トポロジ的な区別があって、コーナー・エッジ・センターと言い分けられています。6 個あるセンターキューブは、芯で十字形に固定されています。そこで、ルービックキューブ机の上に置くときは、センターキューブを動かさないように決めます。これは、図7のサイコロの置き方との類似ですが、目の数ではなく、色違い、例えば(赤橙黄緑青白)です。どの面をどの色にするかの約束はしていません。

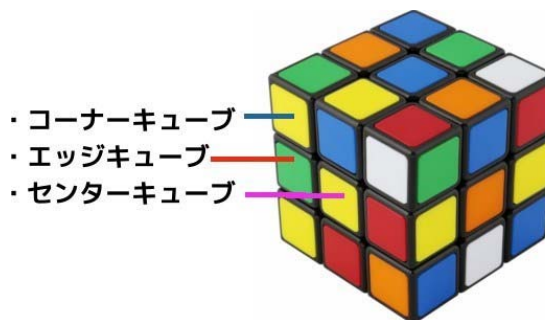


図8 ルービックキューブの色違い

図8はセンターキューブが三面(黄橙青)見えるように投影していますが、反対側のセンターキューブが何色であるかは分かりません。商品としては、色違いで区別すれば、 $5! = 120$ 種にもなります。したがって、手に持って層状の面を回転させると、向きの感覚が分からなくなります。そこで、個人ごとにセンターキューブの標準の向きを決めます。ルービックキューブの遊び方は、図8のようなランダムなキューブの配列を図9のように揃えることです。一般的に、変形しない立体的な物(力学的には剛体)の幾何学的な変換は、移動と回転です。このとき、剛体に固有の座標系を決めておいて、大元の世界座標系との関連を決めます。回転を指定する数学的な方法は、剛体に対して、世界座標系の座標軸回りで指定するか、剛体の方の座標系の座標軸回りで指定するかの二種類があります。前者の方をオイラーの回転と言います。後者は写真撮影の場合、カメラの向きを決める用語のパン・スウィング・ティルトがあります。



図9 面の色を揃える

6.4 回転はトポロジーの理解が必要

立体的な形状の代表として立方体を考えます。図7のサイコロでは目の数、図9のルービックキューブでは色が面ごとに異なりますので、それを区別して机の上に置くことを考えます。机の方に設定する座標系を世界(world)座標系、立方体の方には世界座標系と相似な固有の局所(local)座標系を持たせます。立法体を机の上に置いて、世界座標系と局所座標系と、同じ座標軸ごとに向きを合わせておいて、90度単位で立方体を回転させると、全部で24通りの置き方があります(図10)。この区別を数学的に定義するため、世界座標系から見て、局所座標系の座標軸の向きを単位ベクトルで表し、三つのベクトルを3行3列のマトリックス(行列)まとめます。これが、座標変換の行列です。図10では、面にA~Fの文字を書いていますので、面の向きを区別できます。左上の状態を基本的な状態とし、手前左側面Bに垂直な座標軸回りに回転させた状態を、表10の右に、順に描いてあります。右手系のデカルト座標系に対応させると、B,C,Aの面に垂直な座標軸が、x,y,z座標軸に対応しています。A,B,Cの順は、カメラを構えて被写体にレンズを向ける回転操作の用語であるパン・スイング・ティルトの順に合わせるためです。カメラには固有のカメラ座標系を考えておきます。そのx軸は被写体から手前の方向、z軸は上向きです。

カメラを被写体に向ける操作は、カメラの座標系の座標軸回りの回転を考えます。カメラを水平に構え、頭を左右に振って方向を定めます。これはz軸回りの回転操作ですのでパンと言います。次に首を上下させて被写体を捉えます。これがスイングです。もし必要であれば、被写体を視野に入れたまま首を左右に振ります。これがティルトであって、x軸回りの回転です。一方、世界座標系の座標軸を使って立体形状の物、ここでは被写体の方、の回転を指定することもあって、x軸、y軸、z軸の順です。これがオイラー回転です。

	1	2	3	4
B				
C				
D				
E				
A				
F				

図10 六面体の置き方は24通りある(島田静雄:CAD・CGのための基礎数学、共立出版 2000)

図9のルービックキューブは、見掛け上、全く同じ色遣いのキューブ($3 \times 3 \times 3 = 27$)個を整然と重ねたように見えます。その構成はセンターキューブ(6個)、エッジキューブ12個、コーナーキューブ8個ですが、見える色数はセンター・エッジ・コーナーのキューブ順で、1, 2, 3です。芯のキューブは見えませんが、見えるキューブは26個です。センターキューブを動かさない状態の基準を図16の(B1)として、残りのキューブを回転させると、キューブの図柄の見え方の種類は、(24-1)通りあります。この区別は、幾何学的には座標変換であって、代数的には変換行列を使います。座標軸回りの回転だけでこの変換を行わせると複数回の操作になります。ところが、これを一回の回転でも済ますことができます。その回転軸は、立方体の中心を通る4本の対角線のどれかです。ただし、センターキューブ以外は、回転と共に移動の成分を持つ変換です。

7. 幾何モデリング

7.1 世界観を変える変換

座標系と数式を使うようになったことで、作図を数学的に制御する幾何学が生まれました、図形データを保存しておけば、もとの図形と相似な図形を作図できること、その発展として、図形の変形を数学的に扱う幾何学を生みました。平面図形も立体図形も含め、世界観を変えます。我々が存在している場を実世界とすると、点・線分・平面などの幾何学的要素は、場所を理解する概念であって、実体がありません。それを図で表す仮想の世界を別に考えて、そこに描かれた仮想の実体を覗いていると考えるのです。その実体を幾何モデルと言います。この語は、コンピュータを使って幾何学的な事象を計算するようになって使われるようになった、新しい用語です。そして、数値計算を応用して研究する専門を計算幾何学(computational geometry)と言うようになりました。図形の変形を扱うことは、数学的な変換で行わせます。その変換は二種類あります。一つは線形変換です。直線は直線に変換されることから、この名称がつけました。難しい用語は、アフィン変換です。数学的な処理はベクトルとマトリックス(行列)を使い、この分野は線形代数学に分類しています。代表的な幾何学的処理に図形の回転処理があります。これは座標変換です。したがって、線形空間の用語があって、処理が実行される仮想の世界を言います。ただし、射影変換では直線が直線に変換されますが、代数学では非線形です。

もう一つは非線形変換です。直線が曲線に、平面が曲面になる、また、その逆向きの変換を扱います。代数学的には射影変換を含みます。これは立体図形を平面図形に変換する投影図の作成に応用しますが、平行直線が無遠慮で一点(消点)に集まる図形になります。これは世界観を変える幾何学的変換です。特殊なメガネ(ゴーグル)を通して透視図を見ているときは、別世界に居るような感覚が得られることになることから、その世界を仮想現実(または人工現実: virtual reality)と言います。曲線・曲面は、一次元・二次元の世界が曲がっているとする考え方があり、微積分の数学的手法を応用しますので、微分幾何学としています。さらに、それを観念的に三次元に拡張したものを、リーマン幾何学と分類しています。アインシュタインの一般相対性理論で、重力によって空間が曲がっているとする説に応用されています。幾何に数学を応用することが、このように広がったことから、幾何学が数学の一分野であるとの言い方も広まりました。

7.2 工業製図法への応用

未だ存在していない工業製品の設計をするとき、製品の図面を描きますが、その具体的な作業が製図です。これは、幾何モデルを描きます。実形を正確に相似に描くことはしませんし、関係のない部品も描きません。既に実体が存在している製品を見て作図する、または写真に撮影したものとは区別します。工業製図法は、図学的な投影法の種類の内、平行投影法を使いますが、製品の实形が良く分かる正投影法を使います。もし、製品実形の寸法で平行投影の作図をすると、寸法の大きな構造物の図面では、実物と同じ大きな用紙に描くことになります。そこで、或る尺度で縮小した幾何モデルを考えて、その投影で図面にするので、設計図は計画段階で作成しますが、製作段階に入ると、実形の寸法で材料を加工しますので、実寸での作図を描くこともあります。これを原寸と言います。例えば、大工さんが墨壺を使って木材に線を描くことは原寸作業です。

7.3 計算幾何学で扱うボロノイ図

計算幾何学で扱うトピックは幾つかありますが、有名な課題の一つにボロノイ図を紹介します。例えば、都市居住者が地下鉄網を利用したいとき、地図上でどの駅が近いかを知りたいとき、また、逆に、駅の側からは、その駅を利用する居住者がどの範囲になるかの、言わば勢力圏の作図をするモデルです。図11で、幾つかの母点が地下鉄の駅の位置を表しています。勢力圏は、近接した二つの駅を垂直二等分線を引くことで得られる凸多角形に作図されます。隣接した領域の母点を結んでできる三角形の集合はドロネー図と言います。

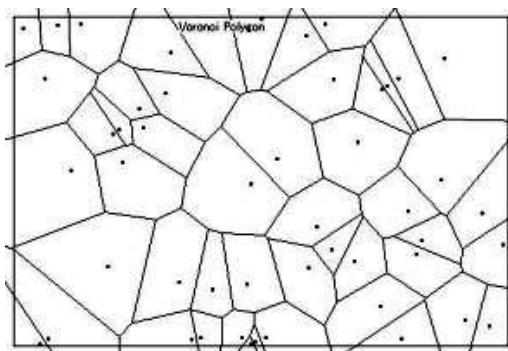


図11 ボロノイ図

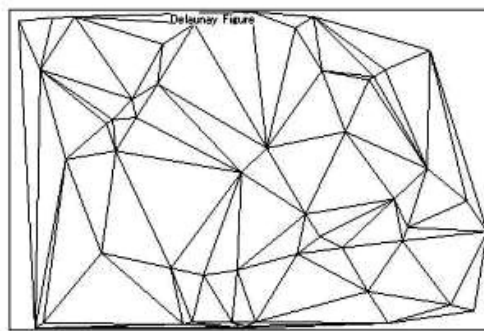


図12 ドロネー図

8. 初等幾何のおさらい

8.1 言葉を使う説明が理解させる王道である

別の冊子にまとめた「易しくない算術のお話」の初めに、庶民生活で最低限必要とされる実用技能の種類を言う慣用語に「読み・書き・そろばん」があること、「話す」が抜けていると解説しました。実は、ギリシャ時代の幾何は、図を使いますが、数式を使わず、論証で納得させる方法をとりました。したがって、幾何は論証を使う学問であると誤解することも起きます。しかし、式を使う表現の方が特別です。数式は、眼で見ても理解させる表現になっていて、グラフィックス(図形)の性質があること、式を声に出して読み上げる方法をとるとき、舌足らずになるため、聞く相手が元の式を正しく再現するには、記号文字の説明が別に必要になること、などがあるからです。例えば、大文字小文字の使い分け、下付き文字を使う変数 C_0 は、二変数 C 、 D と誤解されるなどがあります。幾何の場合、論理的に矛盾のない説明方法を工夫します。定理や公式を引用すると、全体の文字並びを短くできます。幾何では、論証の進め方、または説明方法が複数ある場合があります。どの方法が良いかの優劣を比較するのではなく、論理の立て方と進め方の違いを、興味の対象とします。

8.2 円と線分の組み合わせの平面図形を扱う

初等幾何は、有限長さの線分・円・線分を組み合わせで構成される多角形、とりわけ三角形を材料とした平面図形が研究材料です。したがって、図形学と言い換えると紛れないのですが、未だ認知された用語にはなっていません。このように定義すると、科学の範疇に入ります。似た用語ですが、図学は graphic science と呼ばれていて、認知された用語です。立体図形を平面図形に投影して作図することの原理が研究の対象です。実際に平面図形を作図することや、立体形状の作成に応用することは、技術の課題と捉えます。便宜的に、有限寸法の用紙に図形を描いて理解を助けます。学問化した現代の幾何学では、点・直線・平面は、寸法を持たず、場所を表す概念で理解し、眼に見える実体とはしません。しかし、線分の性質を持った物は生活環境で普通に見ることができます。無限に長い直線は、小さな鏡で太陽光や人工的な灯火を反射させて実体らしく見ることができますが、見通して真っすぐかどうかを確かめるときのように、感覚的にしか理解できません。つまり、幾何学の方で言う直線は、現実世界で見ることがなくて、感覚的に認識する存在です。有限長さの線分を、有限寸法の紙の上に図形として描くのは、現実世界での妥協です。したがって、仮想の(virtual)空間を別に想像するようになりました。コンピュータグラフィックスを応用して立体視で見る景観は、見ている本人だけが感覚的に理解する世界ですので、virtual reality(仮想現実)の用語で呼ばれるようになりました。

8.3 幾何はコンピュータ処理に向いていないこと

幾何の研究に、数または数値を使う学問の数学を応用すること、つまり数値で表して数値計算で結果を理解することは、実はかなり特殊な方法です。この節の見出しにあるように、コンピュータ(パソコン)処理に向いていないのです。例えば、幾何学的要素として、点の情報を知りたいとき、どのように説明するかに困ります。特殊である理由は三つあります。第一は、物として数えられる実体が無いことです。図に描いた点は数えることができますが、取り出して利用できる物ではありません。点は場所を理解するための概念です。線と面も、便宜的に点を並べた集合であると解釈することをしますが、点が実体を持つ物ではありませんので、線も面も場所を意味する概念として理解しなければなりません。第二は、数値化したいとしても、基準に使う単位が無いことです。点は、座標系を決めて、位置を数値で表すことをしますが、整数(デジタル値)だけで表すことができません。無理数も必要になりますが、これはアナログ量の扱いをしますので、正確な値で実用することができません。また、平面座標系を使うときは、二つの数値を組みにします。これを二元数と言います。数学では複素数があって、複素平面は座標系を考えます。複素数は、加減乗除の計算ができますが、これはベクトルとして別扱いの数です。第三は、点・線・面の幾何学的要素間に、加減乗除の算法が無いことです。これに代わる演算則は論理演算です。平面図形や立体形状は、特別な計算対象物(object)です。この処理に、幾何学原理を応用しますが、その処理に適したプログラミング言語、例えば、グラフィックス用の言語はありません。筆者は、図形としての幾何学的素間に疑似的な算法を定義して、BASIC 風のプログラミング言語を開発してきました。8ビットのマイクロプロセッサを使用したマイクロコンピュータ **PC8001**(1979年9月発表)には、BASIC 言語が組み込まれていました。これには、数値計算用の関数が利用できましたが、文字列並びのデータ処理のできる関数があることが画期的でした。現在は、MS-EXCEL の関数として引き継がれていて、他の特殊な関数も含まれています。これらの関数を効率的に利用するため、BASIC 風のプログラム(マクロと言います)を作成して利用できるようになりました。これが VBA(Visual Basic for Applications)です。これを使いこなすには、Visual Basic を使うプログラミングの知識が必要ですし、遡って、単純な BASIC 言語の使い方も常識として必要です。これらの言語によるプログラミングの経験がないと、VBA の利用は非常に難しい問題になるのです。

8.4 幾何言語 GBASIC (Geometry Basic)

初等幾何学の参考書を見ると、円・三角形・線分を描いたイラストがあって、三角形の「五心」(重心・外心・垂心・内心・傍心)などを作図で求める方法が説明してあります。これらのイラストを、コンピュータグラフィックスを応用して、自分のパソコンで作図したいとして筆者が開発したソフトウェアが GBASIC(Geometry Basic)です。一般ユーザの利用環境は、BASIC 風のプログラミングをして利用します。イラストの作図用ソフトは、対話型で利用するものが多いのですが、BASIC 風にした理由は、座標値などの作図データを数値で指示すること、そして、再現性のある文書形式でデータをファイルに保存できることを意図したためです。GBASIC の開発に使用したソースプログラミング言語は、Borland 社の C++6 です。GBASIC の実行画面を図 13 に例示します。Windows の画面は、メニューバーの下に 3 つのサブウィンドウがあります。一行分のコマンド入力用の コンソールウィンドウ、そして、テキストの入出力を表示する テキストウィンドウ と表示専用の グラフィックスウィンドウ です。GBASIC が扱う数値のデータ型は、幾何学的図形を 多元数 として定義しました。

表 1 変数と型

型宣言文	型 の 名 前	元数	内 容
DEFINT	整数	1	8 バイト長
DEFSNG	実数	1	8 バイト長
DEFSTR	文字列	2	16 バイトの固定長
DEF2PT	二次元の点	2	x,y (点の座標)
DEF2LN	二次元の直線	3	a,b,c (直線式 $ax+by+c=0$)
DEF2CR	二次元の円	3	x,y,r (円の中心と半径)
DEF2BX	二次元の矩形	4	x0,y0,a,b ($2a \times 2b$ の寸法)
DEF2ED	二次元の線分	4	x1,y1,x2,y2 (始点終点の座標)
DEF2TR	二次元の変換行列	6	2×3 のマトリックス
DEF3PT	三次元の点	3	x,y,z (点の座標)
DEF3LN	三次元の直線	6	x0,y0,z0,u,v,w (点の座標と向き)
DEF3PL	三次元の平面	4	a,b,c,d (面方程式 $ax+by+cz+d=0$)
DEF3SP	三次元の球	4	x0,y0,z0,r (球の中心と半径)
DEF3BX	三次元の直方体	6	x0,y0,z0,a,b,c ($2a \times 2b \times 2c$)
DEF3ED	三次元の線分	6	x1,y1,z1,x2,y2,z2 (始点と終点)
DEF3TR	三次元の変換行列	12	3×4 のマトリックス

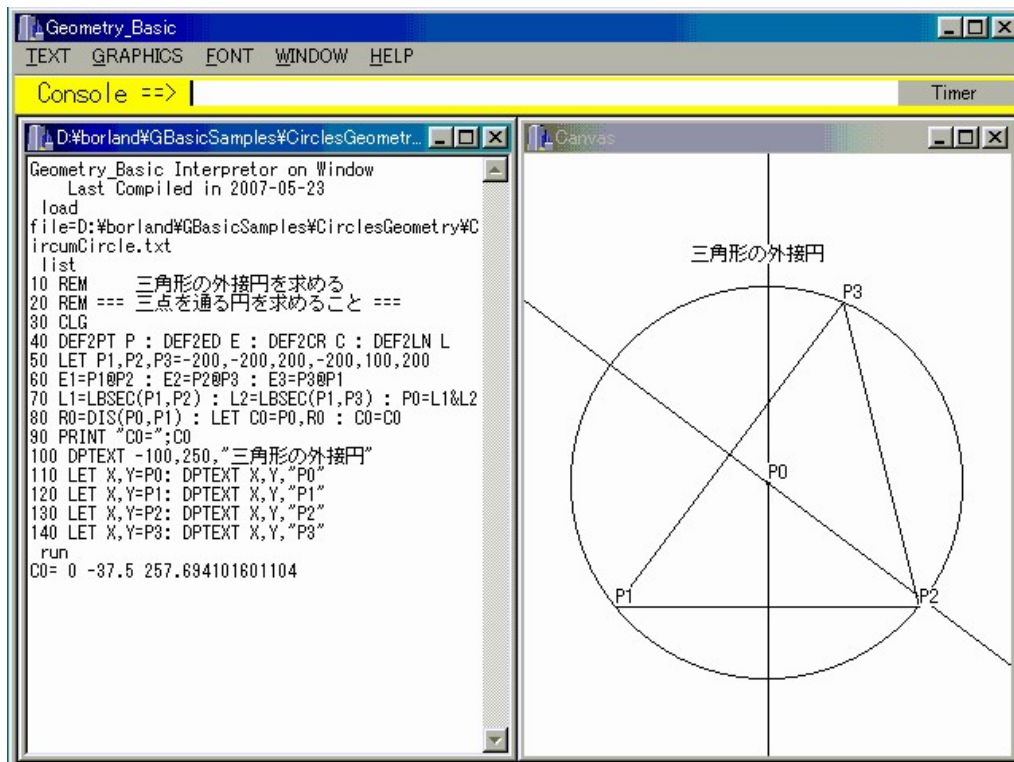


図 13 GBASIC の実行画面の一例(三角形の外接円の作図)

8.5 幾何モデリング言語 GEOMAP

GEOMAP(GEOmetrical Modelling And Processing)は、穂坂衛・木村文彦が1978年にIFIPで発表した論文で紹介されたCADのプログラム名です。多面体の**幾何モデル**のデータ作成と投影を扱い、FORTRAN言語で開発されました。大量のデータ領域を使いますので、当時のコンピュータ環境では複雑な形状を扱うことに制限を伴いましたし、計算時間も掛かりました。これは、その後のパソコン環境が良くなってきましたので、筆者はC言語による書き換えを進めました。ユーザインタフェースが便利のように、上の節で紹介したGBASICのプログラミングのコマンドとして利用できるようにしました。**幾何モデリング**の方法は、単純な形状の材料から機械加工で複雑な形状に仕上げる工程を論理演算に代えて処理します。実際の材料での基本的な加工処理は、溶接と切断の二つですが、それを疑似的な論理演算に代えるときは、論理和・論理積・否定の応用です(表2)。

作図には**隠れ線処理**、**隠れ面処理**が必要です。表2に例示した幾何モデルの作図では、隠れ線を破線で描いてありますので、奥行きが判ります。また、見える面の一部が隠れている図があることも判ります。破線を消すと三次元構造から、各面を色分けできるように地図のような二次元図形への変換になります。このとき、面の表裏を判別して、裏に入る側を区別しなければなりません。また、多面体モデルの展開図を紙に描いて、それを組み立てて三次元モデルを作ることと考えますと、遑って、面が重ならないようにした**展開図**を作成するプログラミングが必要です。これら処理は、**位相幾何学**(topology)の課題と捉えます。

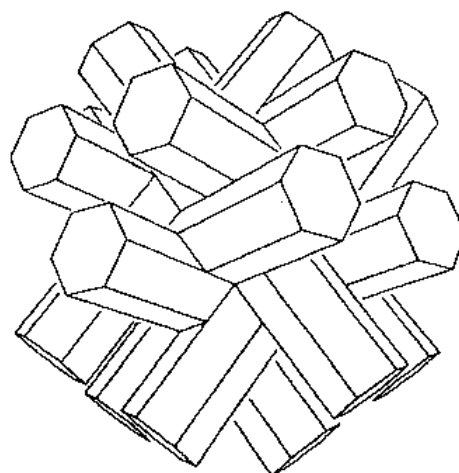
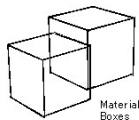
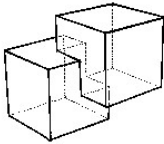
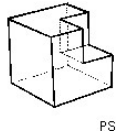


図14 16ビットで処理できる最も複雑な幾何モデル

表2 多面体幾何モデルの干渉処理

コマンド	演 算	論理式	干渉演算前 
PUNI	二つのモデルを一体化して一つのモデルに合成する	$A \text{ or } B$	
PSUB	モデルAからモデルBを引き算するように演算する	$\text{not}(\text{not}A \text{ or } B)$	
PINT	二つのモデルの共通部分を取り出すように演算する	$\text{not}(\text{not}A \text{ or } \text{not}B)$	