

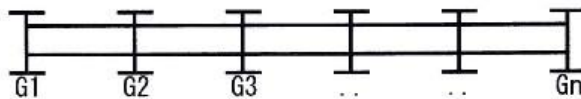
格子桁の分配係数の計算（デモ版）

理論と解析の背景

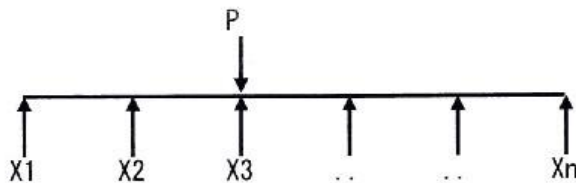
主桁を並列した鋼単純桁の設計では、幅員方向の横桁の剛性を考えて、複数の主桁が協力して活荷重を分担する効果を計算します。これを、単純な(1,0)分配に対して**格子分配**と言います。レオンハルト(F. Leonhardt, 1909-1999)が1950年初頭に発表した論文が元になっていて、理論仮定、記号などの使い方は、その論文を踏襲して設計に応用しています。格子桁構造は不静定構造ですので、正直に取り組むと次数の多い連立方程式を解かなければなりません。論文が発表された時代は、コンピュータの利用ができませんでしたので、巧妙な方法で**分配係数**を計算する数表を使いました。現在はパソコンが利用できますし、とりわけ、エクセルには逆マトリックスの計算が関数として利用できるようになりましたので、分配係数の計算法をエクセルが活用できるようにまとめることにしました。

力学モデル

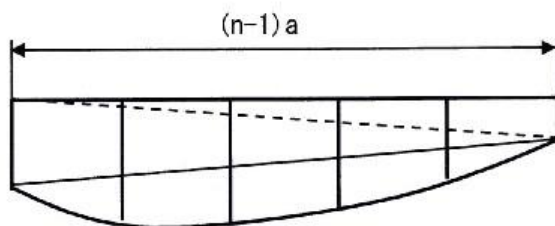
格子桁の解析モデルは、横桁に注目し、この横桁が複数の等間隔バネ支承で支えられた連続梁とします。基本的な単純格子桁構造は、主桁支間の中央に1本の分配横桁を配置したものです。横桁に対して、主桁の作用をバネ支承に置き換えることができます。この場合のバネ係数 c は、主桁中央に単位荷重 P が作用したときの撓み $(PL^3/48EJ_H)$ の逆数です。横桁上を単位荷重 P が移動するとして、バネ支承の反力 X （上向き）を求めます。実用計算は、 I 番目の支承上に $P=1$ が作用したとき、 J 番目の支承反力 X_J を a_{JI} と表し、これを分配係数として求めて利用します。



横桁は力学的に連続梁とする



外力は主桁位置に載せる
横桁へは、主桁からの反力を上向きの力で考える



両端単純支持の曲げ変形と
両端の撓みによる
直線状の変位を加算する

格子剛度

分配の性質は、横桁の曲げ剛性 EJ_0 とバネ係数 c との比に関係します。3本主桁で、主桁間隔が a の格子桁構造を考えると、横桁の撓みは、支間 $2a$ の単純梁の変形ですので、この剛性を $48EJ_0/(2a)^3$ のバネと考えます。主桁作用のバネ係数との比を**格子剛度**と言い、記号 z で表します。式は $(EJ_0/EJ_H) (L/2a)^3$ です。この係数は、分配横桁を主桁支間の中央に一本配置するとしたときです。複数の横桁を考慮するときは、横桁の寄与率が主桁支間方向に正弦(sin)波形になるとします。例えば主桁支間の4等分点に横桁を入れるとき、格子剛度を2.4倍にします。 $z=0$ の場合は、結果的に(1,0)分配になります。 z が十分に大きいときは、橋の幅員方向に曲げが起きません。この状態の分配計算は、マトリックスを扱うまでもなく、簡単に計算できます。ただし、この概要説明の後の方で、 z の値が無量大と仮定できる場合のマトリックスの計算式も示しました。

耳桁の剛性の考慮

分配係数の計算条件は、主桁本数 n 、格子剛度 z です。通常の並列鋼桁橋では、主桁はすべて同じ断面を使います。しかし、分配の効率を上げる場合、耳桁（幅員端側の桁）の断面を大きくすることがあります。最近の桁橋では、上下線を別橋梁とすることがあり、また、防音壁などの敷設が片側に有る、など、左右耳桁で剛性が異なる場合にも対応する計算が必要になりました。これは、中央部分の主桁に対して、曲げ合成が j_1, j_7 倍であるとして入力条件に加えます。バネ支承で支持された連続梁の計算では、両端で単純支持にした静定基本形状状態での撓みの影響値をあらかじめ準備しなければなりません。これは別のエクセル版ソフト「単純梁影響線.xls」にある計算表を参照します。

弾性条件

構造解析は、変形を考える弾性条件と力の釣合条件を考えます。これをマトリックスの形にまとめます。まず、横桁を、両端で単純支持された梁としての変形式を考えます。両端の撓みを $\delta_1 = \delta_n = 0$ とし、外力の荷重として、 $P_2 \sim P_{n-1}$ 反力 $X_2 \sim X_{n-1}$ を考えます。1番目と n 番目を扱いませんが、後の式と合わせるように、 $n \times n$ のマトリックスにまとめます。具体的に説明する撓み式(1)以降は、 $n=7$ の場合で例示します。5×5の数値は、6パネル分割の単純梁の撓みの影響値を「単純梁影響線.xls」からコピーしたものです。

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \frac{l^3}{6EJ_G} \cdot \frac{1}{7-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 76 & 78 & 62 & 34 & 0 \\ 0 & 76 & 128 & 138 & 112 & 62 & 0 \\ 0 & 78 & 138 & 162 & 138 & 78 & 0 \\ 0 & 62 & 112 & 138 & 128 & 76 & 0 \\ 0 & 34 & 62 & 78 & 76 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 - X_1 \\ P_2 - X_2 \\ P_3 - X_3 \\ P_4 - X_4 \\ P_5 - X_5 \\ P_6 - X_6 \\ P_7 - X_7 \end{bmatrix} \quad \dots (1)$$

上で説明した単純梁は、支点1と n とで支持されています。どちらもバネ支承になっていますので、この間を直線で結んだ位置を、格点ごとに ε で求めます (式2)。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \end{bmatrix} = \frac{l^3}{48EJ_H} \cdot \frac{1}{7-1} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 / j_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_7 / j_7 \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

上の式中の j_1, j_7 は、耳桁の曲げ剛性が、中間の主桁よりも j 倍おおいことを表します。 X は、この撓みに比例したバネの反力です。全体の变形は、格点ごとに $(\delta + \varepsilon)$ です。この関係を式(3)に示します。

$$\begin{bmatrix} \delta_1 + \varepsilon_1 \\ \delta_2 + \varepsilon_2 \\ \delta_3 + \varepsilon_3 \\ \delta_4 + \varepsilon_4 \\ \delta_5 + \varepsilon_5 \\ \delta_6 + \varepsilon_6 \\ \delta_7 + \varepsilon_7 \end{bmatrix} = \frac{l^3}{48EJ_H} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 / j_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 / j_7 \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

力の釣合条件

力の釣合条件は、 $\sum V = \sum M = 0$ の二つです。式としては二つですが、変数の数に合わせるように、0の計算をするマトリックス成分を並べて表示しました（式4）。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 - X_1 \\ P_2 - X_2 \\ P_3 - X_3 \\ P_4 - X_4 \\ P_5 - X_5 \\ P_6 - X_6 \\ P_7 - X_7 \end{bmatrix} \quad \dots (4)$$

連立方程式

式(1)～(4)をまとめて、Pを定数項とし、Xを未知数とする連立方程式を求めます。

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -5z/j_1 \\ -4z/j_1 \\ -3z/j_1 \\ -2z/j_1 \\ -z/j_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50+6z & 76 & 78 & 62 & 34 \\ 76 & 128+6z & 138 & 112 & 62 \\ 78 & 138 & 162+6z & 138 & 78 \\ 62 & 112 & 138 & 128+6z & 76 \\ 34 & 62 & 78 & 76 & 50+6z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z/j_7 \\ -2z/j_7 \\ -3z/j_7 \\ -4z/j_7 \\ -5z/j_7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 76 & 78 & 62 & 34 \\ 76 & 128 & 138 & 112 & 62 \\ 78 & 138 & 162 & 138 & 78 \\ 62 & 112 & 138 & 128 & 76 \\ 34 & 62 & 78 & 76 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{bmatrix} \quad \dots (5)$$

式(5)は、Xを未知数とする連立一次方程式です。左辺のマトリックスの逆マトリックスを求めて、右辺の定数項のマトリックスを計算することで、任意のPの荷重状態の解が得られます。解の形式は、下の式(6)のように表します。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{bmatrix} \quad \dots (6)$$

右辺のマトリックスの行方向の成分は、Xの影響値です。列方向の成分は、或る外力の作用状態のときの反力の分布状態を表します。

z = ∞ の場合の連立方程式

横桁の曲げ剛性が十分に大きくなると、横桁の変形がありませんので、式(1)の δ を 0 と置いて、連立方程式を求めます。

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -5/j_1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/j_7 \\ -4/j_1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -2/j_7 \\ -3/j_1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -3/j_7 \\ -2/j_1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -4/j_7 \\ -1/j_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5/j_7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{bmatrix} \quad \dots (7)$$

作業用シートの解説

実用することを考えて、主桁本数別に独立した計算用シートを準備しました。ユーザは、格子剛度 z と、耳桁の剛比 j を入力するだけです。最初の計算値は、デフォルト値として、z = 10、j₁ = 1、j_n = 1 としてあります。

分配係数の計算結果はマトリクス [T₄] です。この行の成分が、影響線の値です。列の成分が、P = 1 の単位荷重が作用するときの、格点の反力分布を表します。計算結果を確認するため、行成分と列成分の和 (sum check) を計算してあります。列ごとの和は 1 になります。行ごとの和は、耳桁の剛性が 1 でなければ、1 にはなりません。

主桁 3 本の分配係数

格子剛度が有限値の場合

格子剛度	Z =	10
耳桁剛比	J ₁ =	1
耳桁剛比	J ₃ =	1

[T₁] Pの係数マトリックス

2	1	0
0	2	0
0	1	2

[T₂] Xの係数マトリックス

2	1	0
-10	22	-10
0	1	2

[T₃] = inv[T₂] : 逆マトリックスの計算

0.4219	-0.0156	-0.0781
0.1563	0.0313	0.1563
-0.0781	-0.0156	0.4219

[T₄] = [T₃] * [T₁] : 分配係数の計算結果 sum check

0.8438	0.3125	-0.1563	1.0000
0.3125	0.3750	0.3125	1.0000
-0.1563	0.3125	0.8438	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	3.0000

格子剛度が無限大の場合

格子剛度	Z =	∞
耳桁剛比	J ₁ =	1
耳桁剛比	J ₇ =	1

[T₁] Pの係数マトリックス

2	1	0
0	0	0
0	1	2

[T₂] Xの係数マトリックス

2	1	0
-1	2	-1
0	1	2

[T₃] = inv[T₂] : 逆マトリックスの計算

0.4167	-0.1667	-0.0833
0.1667	0.3333	0.1667
-0.0833	-0.1667	0.4167

[T₄] = [T₃] * [T₁] : 分配係数の計算結果 sum check

0.8333	0.3333	-0.1667	1.0000
0.3333	0.3333	0.3333	1.0000
-0.1667	0.3333	0.8333	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	3.0000

主桁 4 本の分配係数

格子剛度が有限値の場合

格子剛度	$Z =$	10
耳桁剛比	$J_1 =$	1
耳桁剛比	$J_4 =$	1

[T₁] Pの係数マトリックス

3	2	1	0
0	8	7	0
0	7	8	0
0	1	2	3

[T₂] Xの係数マトリックス

3	2	1	0
-20.0000	38	7	-10.0000
-10.0000	7	38	-20.0000
0	1	2	3

[T₃]= inv[T₂] : 逆マトリックスの計算

0.2505	-0.0115	-0.0018	-0.0505
0.1152	0.0212	-0.0079	0.0181
0.0181	-0.0079	0.0212	0.1152
-0.0505	-0.0018	-0.0115	0.2505

[T₄]= [T₃]*[T₁] : 分配係数の計算結果

0.7515	0.3456	0.0544	-0.1515
0.3456	0.3631	0.2369	0.0544
0.0544	0.2369	0.3631	0.3456
-0.1515	0.0544	0.3456	0.7515
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

sum check

1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
4.0000

格子剛度が無限大の場合

格子剛度 $Z = \infty$
 耳桁剛比 $J1 = 1$
 耳桁剛比 $J7 = 1$

[T₁]

Pの係数マトリックス

3	2	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	1	2	3

[T₂]

Xの係数マトリックス

3	2	1	0
-2.0000	3	0	-1.0000
-1.0000	0	3	-2.0000
0	1	2	3

[T₃]=

inv[T₂] : 逆マトリックスの計算

0.2333	-0.1333	-0.0333	-0.0667
0.1333	0.2333	-0.0667	0.0333
0.0333	-0.0667	0.2333	0.1333
-0.0667	-0.0333	-0.1333	0.2333

[T₄]=

[T₃]*[T₁] : 分配係数の計算結果

0.7000	0.4000	0.1000	-0.2000
0.4000	0.3000	0.2000	0.1000
0.1000	0.2000	0.3000	0.4000
-0.2000	0.1000	0.4000	0.7000

sum check

1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 4.0000

主桁5本の分配係数

格子剛度が有限値の場合

格子剛度	Z =	10
耳桁剛比	J ₁ =	1
耳桁剛比	J ₅ =	1

[T₁] Pの係数マトリックス

4	3	2	1	0
0	18	22	14	0
0	22	32	22	0
0	14	22	18	0
0	1	2	3	4

[T₂] Xの係数マトリックス

4	3	2	1	0
-30.0000	58	22	14	-10.0000
-20.0000	22	72	22	-20.0000
-10.0000	14	22	58	-30.0000
0	1	2	3	4

[T₃] = inv[T₂] : 逆マトリックスの計算

0.1796	-0.0083	-0.0021	0.0009	-0.0241
0.0832	0.0160	-0.0062	-0.0025	-0.0094
0.0207	-0.0062	0.0165	-0.0062	0.0207
-0.0094	-0.0025	-0.0062	0.0160	0.0832
-0.0241	0.0009	-0.0021	-0.0083	0.1796

[T₄] = [T₃] * [T₁] : 分配係数の計算結果

0.7185	0.3328	0.0826	-0.0376	-0.0963	1.0000
0.3328	0.3581	0.2479	0.0988	-0.0376	1.0000
0.0826	0.2479	0.3388	0.2479	0.0826	1.0000
-0.0376	0.0988	0.2479	0.3581	0.3328	1.0000
-0.0963	-0.0376	0.0826	0.3328	0.7185	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	5.0000

格子剛度が無限大の場合

格子剛度	Z=	∞
耳桁剛比	J1=	1
耳桁剛比	J7=	1

[T₁]

Pの係数マトリックス

4	3	2	1	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	1	2	3	4

[T₂]

Xの係数マトリックス

4	3	2	1	0
-3.0000	4	0	0	-1.0000
-2.0000	0	4	0	-2.0000
-1.0000	0	0	4	-3.0000
0	1	2	3	4

[T₃]=

inv[T₂] : 逆マトリックスの計算

0.1500	-0.1000	-0.0500	0.0000	-0.0500
0.1000	0.1750	-0.0500	-0.0250	0.0000
0.0500	-0.0500	0.2000	-0.0500	0.0500
0.0000	-0.0250	-0.0500	0.1750	0.1000
-0.0500	0.0000	-0.0500	-0.1000	0.1500

[T₄]=

[T₃]*[T₁] : 分配係数の計算結果

0.6000	0.4000	0.2000	0.0000	-0.2000
0.4000	0.3000	0.2000	0.1000	0.0000
0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000
-0.2000	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

sum check

1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
5.0000

